Blatt 7

Abgabe: bis Freitag 3.6.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (40 P)
Betrachte auf dem Gebiet $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $h(x) = 0$ für $|x| = 1$ und $h(0) = 1$. Zeige, dass

$$u_P(x) := \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

die Perron-Lösung ist.

Hinweis: *Konstruiere eine Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Oberfunktionen, für die $w_k(x) \to u_P(x)$ $(k \to \infty)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$. Argumentiere, dass dies ausreicht, um zu schliessen, dass u_P die Perron-Lösung ist. Die Folgenglieder können stückweise aus konstanten und der Fundamentallösung gebastelt werden.*

Aufgabe 2: (40 P) (Hebbare Singularität)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ ein Gebiet, $x_0 \in \Omega$ und betrachte eine auf $\Omega \setminus \{x_0\}$ harmonische Funktion u. x_0 heißt hebbare Singularität von u, falls eine in Ω harmonische Funktion $\tilde{u}$ existiert mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$. Zeige, dass, falls

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{\Phi(x - x_0)} = 0,$$

dann ist x_0 eine hebbare Singularität von u. Φ ist hier die Fundamnetallösug für den Laplace-Operator.

Hinweis: *Betrachte auf $B_R(x_0)\setminus\{x_0\}$ (mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$) die Funktion $v_\varepsilon(x) := u(x) - v(x) + \varepsilon(\Phi(x - x_0) - \Phi(R\mathbf{e}_1))$, wobei $v(x) := \int_{\partial B_R(x_0)} K_{R,x_0}(x, y)u(y)dS(y)$ das Poisson-Integral für den Ball $B_R(x_0)$ ist. Zeige, dass in $B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ gilt $v_\varepsilon \geq 0$ für $\varepsilon \geq 0$ und $v_\varepsilon \leq 0$ für $\varepsilon \leq 0$. Es muss auf dem Ring $B_R(x_0) \setminus B_\delta(x_0)$ gearbeitet werden und $\delta \to 0+$ muss untersucht werden.*

Aufgabe 3: (20 P)
Zeige, dass für $\Omega := B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ das Problem aus Aufgabe 1, d.h.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $h(x) = 0$ für $|x| = 1$ und $h(0) = 1$, keine klassische Lösung hat.

Hinweis: *Aufgabe 2.*