Blatt 8

Abgabe: bis Freitag 10.6.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (30P) (Äußere Kegelbedingung)

(a) **(12 P)** Betrachte für den Öffnungswinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$ den Kegel

$$K_\alpha = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : r \in (0,\infty), \varphi \in (0,\alpha)\}$$

in $\mathbb{R}^2$. Finde alle in K_α harmonischen, positiven Funktionen der Form $u(x) = r^\beta w(\varphi), \beta \in \mathbb{R}$ mit $u = 0$ auf ∂K_α, wobei $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi$.

(b) **(18 P)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, das in $x_0 \in \partial\Omega$ die äußere Kegelbedingung erfüllt, d.h. es gibt einen Kegel K (der nach Verschiebung und Rotation in ein K_α überführt werden kann) mit $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \overline{K} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Zeige, dass x_0 ein regulärer Punkt ist.

Hinweis: *Finde eine in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{K}$ positive harmonische Funktion (Barrierenfunktion).*

Aufgabe 2: (20P)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $\partial\Omega$ regulär. Zeige, dass eine subharmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ existiert mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $u < 0$ in Ω.

Hinweis: *Betrachte die Lösung der Poisson-Gleichung mit einer passenden rechten Seite.*

Aufgabe 3: (25P) (Selbstähnliche Lösung der Wärmeleitungsgleichung)
Betrachte

$$\frac{n}{2}v(y) + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Finde alle radialsymmetrische Lösungen, deren Wert und Ableitung im Unedlichen ($r \to \infty$) schneller als r^{-n} abfällt.

Aufgabe 4: (25P) (Separation der Variablen für die 1D-Wärmeleitungsgleichung)
Mit Hilfe der Separation der Variablen finde eine klassische Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

für $\Omega = (0,\pi) \subset \mathbb{R}$ und $u_0 \in C^1(\Omega)$ mit $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$.