21.9.2016, 9:00-12:00

Klausur - zweiter Termin

Allgemeine Hinweise: Begründen Sie alle Schritte möglichst detailliert. **Erklären Sie insbesondere alle Vertauschungen von Grenzübergängen.**

Aufgabe 1: (13 P) Berechnen Sie für $f \in C^1([0,\pi])$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$ die Lösung von

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 u(x) &= f(x), \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) &= 1, u(\pi) = 2 \end{aligned}$$

und beweisen Sie, dass dieses u eine klassische Lösung ist.

Hinweis: Sie dürfen homogene Randbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$ statt den obigen Randbedingungen betrachten, verlieren dadurch aber 2 Punkte.

Aufgabe 2: (10 P) Schreiben Sie explizit die Fundamentallösung Φ der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Zeigen Sie

$$-\int_{\partial B_R(0)} \nabla \Phi(x) \cdot \nu(x) \, \mathrm{d}S(x) = 1$$

für alle $R > 0$, wobei $\nu(x)$ der äußere Normalenvektor auf der Sphäre $\partial B_R(0)$ ist.

Aufgabe 3: (14 P) Formulieren und beweisen Sie das Maximumprinzip (nicht das starke Maximumprinzip) für den Laplace-Operator und ein $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

Aufgabe 4: (8 P) Definieren Sie die Perron-Lösung für das Laplace-Problem auf beschränktem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Dirichlet-Randdaten. Erklären Sie alle Begriffe und Ausdrücke, die Sie verwenden.

Aufgabe 5: (8 P) Schreiben Sie die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^n$ und verwenden Sie die für eine Darstellung der klassischen Lösung des homogenen Cauchy-Problems auf dem Ganzraum. Formulieren Sie nötige Bedingungen an die Anfangsdaten, sodass die Formel eine klassische Lösung ist.

Aufgabe 6: (12 P) Zeigen Sie für den sphärischen Mittelwert

$$U(x,r,t) = \frac{1}{r^{n-1}|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t) \, \mathrm{d}S(y)$$

mit $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ und $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$, dass

$$\partial_r U(x,r,t) = \frac{1}{r^{n-1}|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) \, \mathrm{d}y.$$

Aufgabe 7: (10 P) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) + \Delta u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), \partial_t u(x,0) &= h(x) \end{aligned}$$

mit $\operatorname{supp}(g), \operatorname{supp}(h) \subset B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$.
Formulieren Sie die Kirchhoff-Formel für die Lösung u. Bestimmen Sie, zu welchen Zeiten die Lösung $u(x_*, t)$ im Punkt $x_* = (2,0,0)$ auf jeden Fall (unabhängig von der Form von g und h in $B_1(0)$) Null ist.

Aufgabe 8: (11 P) Zeichnen Sie die Charakteristiken und den Schock und bestimmen Sie die explizite Form der Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + u^2 \partial_x u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= \begin{cases} 3, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9: (14 P) Definieren Sie für die Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + \partial_x (f(u))(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt die Lösung mit Viskositätsmethode und zeigen Sie, dass sie tatsächlich eine schwache Lösung ist.