$$\Rightarrow (\partial_t - \Delta) u_{\lambda,y}(x,t) = \lambda y (\partial_t u - \Delta u)(\sqrt{\lambda}\, x, \lambda t) = 0$$ ∎

Suche selbstähnliche Lsgen, d.h. u mit

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\sqrt{\lambda}\, x, \lambda t) \qquad \forall \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \qquad (5)$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Trick: setze $\lambda = \frac{1}{t}$ in (5):

$$u(x,t) = t^{-\alpha} u\left(\tfrac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) =: t^{-\alpha} v\left(\tfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\partial_t u(x,t) = -\alpha t^{-\alpha-1} v\left(\tfrac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \underbrace{t^{-\alpha-\frac{3}{2}} x}_{= t^{-\alpha-1}\frac{x}{\sqrt{t}}} \cdot (\nabla v)\left(\tfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\Delta u(x,t) = t^{-\alpha-1} (\Delta v)\left(\tfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Für (4) muss also:

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y) = 0 \qquad (6)$$

Ein Lsg von (6) mit $\alpha = \frac{n}{2}$: $v(y) = b\, e^{-\frac{|y|^2}{4}}$, $b \in \mathbb{R}$. (cf. Übung)

$\Rightarrow u(x,t) = b\, t^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$, $b \in \mathbb{R}$ ist selbstähnliche Lsg

<u>Def</u>: Die Funktion $H: \begin{cases} \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{cases}$

heißt der <u>Wärmeleitungskern</u> / <u>Fundamentallsg der Wärmeleit-Gl.</u>

<u>Lemma 3.2</u> $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} H(x,t)\, dx = 1 \qquad \forall t > 0$

<u>Bew</u>: $$(4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \overset{(y = \frac{x}{2\sqrt{t}})}{=} (2\sqrt{t})^n (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy$$

$$= \pi^{-n/2} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-|y_j|^2} dy_j = \pi^{-n/2} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds}_{= \sqrt{\pi}}\Big)^n = 1$$ ∎

3.2. Das homogene Cauchy-Problem auf dem Ganzraum

Betrachte

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)}\ \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \text{(ii)}\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0+}} u(x,t) = u_0(x_0) & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} (7)$$

Bem: 1) (ii) bedeutet: u stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und $u(x,0) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$.

2) u heißt eine klass. Lsg von (7i), falls

$$\partial_t u,\ \partial_{x_i} u,\ \partial_{x_i}\partial_{x_j} u \in C(\mathbb{R}^n) \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$$

und (7i) gilt.

Satz 3.3 Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann löst $u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy$ Problem (7) und $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Bew: 1) z.z. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ und $\partial_t u = \Delta u$

offenbar $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\tau,\infty))$ $\forall \tau > 0$

- für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $|D_x^\alpha H(x,t)| \le C_{\alpha,\tau} |p_\alpha(x)|\, e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}}$ $\forall (x,\tau) \in \mathbb{R}^n \times [\tau,\infty)$

$$= C_{\alpha,\tau} \underbrace{|p_\alpha(x)|\, e^{-\frac{|x|^2}{8\tau}}}_{\le C} e^{-\frac{|x|^2}{8\tau}}$$

$$\le \tilde{C}_{\alpha,\tau}\, e^{-\frac{|x|^2}{8\tau}}$$

(p_α = Polynom Grades $\le |\alpha|$)

- analog für $m \in \mathbb{N}^0$ $|\partial_t^m H(x,t)| \le \overline{C}_{m,\tau}\, e^{-\frac{|x|^2}{8\tau}}$ $\forall (x,\tau) \in \mathbb{R}^n \times [\tau,\infty)$
- major.-Konvergenz-Argument:

$$|D_x^\alpha H(x-y,t)| \le \tilde{C}_{\alpha,\tau}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{8\tau}} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ t \ge \tau$$

$$\le \tilde{C}_{\alpha,\tau}\, e^{\frac{|x|^2}{8\tau}}\, e^{-\frac{|y|^2}{16\tau}}$$

weil $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x\cdot y \ge |x|^2 + |y|^2 - (2|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2) = \frac{1}{2}|y|^2 - |x|^2$

$$\left(2|x|^2 + \tfrac{1}{2}|y|^2 - 2x\cdot y = |\sqrt{2}\,x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y|^2 \ge 0\right)$$

Sei $x_* \in \mathbb{R}^n$, $R>0$ beliebig.

Für $x \in B_R(x_*)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \geq \tau$

$$|D_x^\alpha H(x-y,t)| \leq \tilde{C}_{\alpha,\tau,R,|x_0|}\, e^{-\frac{|y|^2}{16\tau}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Analog $|\partial_t^m H(x-\cdot,t)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\overset{\text{major.}}{\underset{\text{konv.}}{\Longrightarrow}}$ $u \in C^\infty(B_R(x_*)\times(\tau,\infty))$ $\forall x_* \in \mathbb{R}^n, R>0, \tau>0$, d.h. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

und

$$D_x^\alpha u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} (D_x^\alpha H)(x-y,t)\, u_0(y)\, dy, \quad \partial_t^m u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t^m H)(x-y,t)\, u_0(y)\, dy$$

$$\Rightarrow (\partial_t - \Delta) u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_t - \Delta) H(x-y,t)}_{=0} u_0(y)\, dy = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

2) z.z. AB

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |u_0(x) - u_0(x_0)| < \varepsilon$ (u_0 stetig)

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| \leq \int_{B_\delta(x_0)} H(x-y,t)\, |u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} H(x-y,t)\, |u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy$$

$$=: I_1 + I_2$$

$$I_1 \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, dy = \varepsilon$$

I_2: Sei $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)$

$$|y - x_0| \leq |y-x| + |x - x_0| \leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \leq |y-x| + \frac{|y-x_0|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|y-x_0|}{2} \leq |y-x|$$

$$I_2(x) \leq \frac{2\|u_0\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\, dy = \frac{2\|u_0\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} e^{-\frac{|z|^2}{16t}}\, dz$$

$$= \frac{2\|u_0\|_\infty (16t)^{n/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{\delta}{\sqrt{16t}}}(0)} e^{-|y|^2}\, dy = C_n \|u_0\|_\infty \int_{\frac{\delta}{\sqrt{16t}}}^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\, dr$$

$$\longrightarrow 0 \quad (t \to 0+)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ t\to 0+}} u(x,t) = u_0(x_0)$$ ∎

3.3. Das inhomogene Cauchy-Problem auf dem Ganzraum

Erinnerung: Variation der Konstanten für ODEs

1) $u'(t) = Au(t)$ mit $u: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$

jede Lsg: $u(t) = e^{tA}c$ mit $c\in\mathbb{R}^N$ und $e^{A} := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$

2) $u'(t) = Au(t) + f(t)$ $\quad (*)$

Ansatz (Var. der Konstanten): $u(t) = e^{tA}c(t)$

$u'(t) = \cancel{e^{tA}Ac(t)} + e^{tA}c'(t) \overset{!}{=} \cancel{Ae^{tA}c(t)} + f(t)$

$$c(t) = \int_0^t e^{-sA}f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)\,ds}$$ (eine partikuläre Lsg von $(*)$ – nämlich mit $u(0)=0$)

Betrachte

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad , (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$$
$$u(x,0) = 0$$

Notation: Sei $D\subset\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ offen

- $C^{2,1}(D) := \{f: D\to\mathbb{R} : f, \partial_{x_i}f, \partial_{x_i}\partial_{x_j}f, \partial_t f \in C(D\times(0,\infty))\ \forall i,j=1,\dots,n\}$
- Sei $D\subset\tilde{D}\subseteq\overline{D}$

  $C^{2,1}(\tilde{D}) := \{f\in C^{2,1}(D): f, \partial_{x_i}f, \partial_{x_i}\partial_{x_j}f, \partial_t f$ stetig fortsetzbar auf $\tilde{D}\ \forall i,j\}$

Satz 3.4: Sei $f\in C^{2,1}(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))\cap C(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ beschränkt mit beschränkten Ableitungen $D_x^\alpha f, \partial_t f$ für alle $|\alpha|\le 2$ und sei

$$u(x,t) := \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds \quad , x\in\mathbb{R}^n, t>0.$$

Dann gilt

(i) $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(ii) $\partial_t u - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$

Bew: (iii): $|u(x,t)| \le \|f\|_\infty \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t-s)\,dy}_{=1}\,ds = t\|f\|_\infty \to 0 \ (t\to 0)$

(i) & (ii): $u(x,t) \underset{\substack{z:=x-y\\ \tau:=t-s}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{H(z,\tau) f(x-z,t-\tau)}_{=:\Psi(z,\tau,x,t)}\,dz\,d\tau$

$D_x^\alpha \Psi$, $\partial_t \Psi$ stetig für $|\alpha|\le 2$ und

1) $|D_x^\alpha \Psi| \le H(z,\tau)\,\|D_x^\alpha f\|_\infty$

2) $|\partial_t \Psi| \le H(z,\tau)\,\|\partial_t f\|_\infty$

1), 2), $H \in L^1(\mathbb{R}^n \times (0,t))\ \forall t>0 \overset{\text{Leb.}}{\Longrightarrow} u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ und

$\Delta u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(z,\tau)\,\Delta_x f(x-z,t-\tau)\,dz\,d\tau$

$\partial_t u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(z,\tau)\,\partial_t f(x-z,t-\tau)\,dz\,d\tau + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} H(z,t) f(x-z,0)\,dz}_{=:K(x,t)}$

$(\partial_t u - \Delta u)(x,t) = \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} H(z,\tau)(\partial_t - \Delta_x) f(x-z,t-\tau)\,dz\,d\tau \quad =: I_1$

$+ \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \text{—— " ——} \quad =: I_2$

$+ K(x,t)$

$|I_1| \le \|\partial_t f - \Delta f\|_\infty \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} H(z,\tau)\,dz\,d\tau = \varepsilon \|\partial_t f - \Delta f\|_\infty \to 0 \ (\varepsilon \to 0)$

I_2: $(\partial_t - \Delta_x) f(x-z,t-\tau) = (-\partial_\tau - \Delta_z) f(x-z,t-\tau)$

nach partiellen Int (cf. unten):

$$I_2 = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_\tau - \Delta_z) H(z,\tau)}_{=0} f(x-z, t-\tau)\, dz\, d\tau$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} H(z,t) f(x-z,0)\, dz + \int_{\mathbb{R}^n} H(z,\varepsilon) f(x-z, t-\varepsilon)\, dz$$

$$= -k(x,t) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} H(z,\varepsilon) f(x-z, t-\varepsilon)\, dz}$$

$$\longrightarrow f(x,t) \quad (\varepsilon \to 0+) \quad \text{nach S. 3.3}$$

$\Rightarrow$ mit $\varepsilon \to 0$ erhalte

$$(\partial_t u - \Delta u)(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} (I_1 + I_2 + k(x,t)) = f(x,t)$$

Zur partiellen Int. in z (in τ klar):

Sei $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschr. mit beschr. Ableitungen

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \partial_{z_i} h(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} e^{-|z|^2} \partial_{z_i} h(z)\, dz =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} -\partial_{z_i}(e^{-|z|^2}) h(z)\, dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R(0)} \underbrace{e^{-|z|^2} h(z)\, \nu_i(z)}_{|\cdot| \le \|h\|_\infty e^{-|R|^2}} dS(z)}_{=0}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{z_i}(e^{-|z|^2}) h(z)\, dz$$

<u>Korollar 3.5</u>: Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und f wie im Satz 3.4.

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y, t-s) f(y,s)\, dy\, ds$$

erfüllt • $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

• $\partial_t u - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

• $\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0) \\ t>0}} u(x,t) = u_0(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

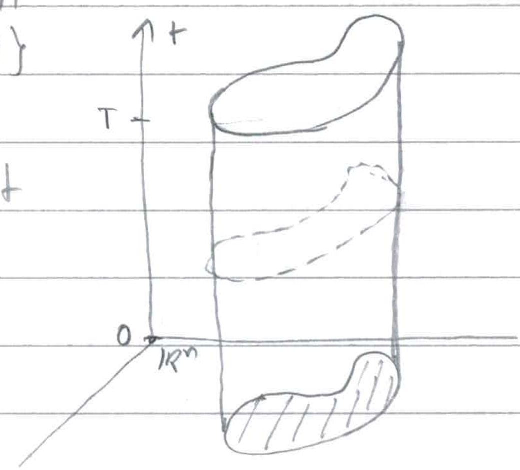
3.4. Maximumprinzip und Mittelwerteigenschaft

<u>Def</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$.

(a) $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ heißt parabolischer Zylinder

(b) $\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$ heißt — " — Rand

<u>Bem</u>: 1) $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T) \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$



2) Das Anfangsrandwertproblem (ARWP) ist

$$(8) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

(g beinhaltet AB + RB)

Satz 3.6 (schwaches Max-Prinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. Falls $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ und $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ in Ω_T, dann

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u .$$

<u>Bew</u>: a) Sei $\partial_t u - \Delta u < 0$ in Ω_T

Falls das Max. in $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ angenommen wird, dann

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x_0, t_0) \leq 0 \\ \text{und } &\partial_t u(x_0, t_0) = 0, \text{ falls } t_0 < T \\ &\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0, \text{ falls } t_0 = T \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\partial_t u - \Delta u)(x_0, t_0) \geq 0 \ \rightarrow\leftarrow$$

b) $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ in Ω_T

Sei $u_\varepsilon(x,t) := u(x,t) + \varepsilon e^{\gamma x_1}$ für ein $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$(\partial_t - \Delta) u_\varepsilon \leq 0 - \varepsilon \gamma^2 e^{\gamma x_1} < 0 \overset{a)}{\Longrightarrow} \max_{\overline{\Omega_T}} u_\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Mit $\varepsilon \to 0$ erhalte den Satz. $\blacksquare$

(Eindeutigkeit für ARWP)

Satz 3.7 Es gibt höchstens eine Lsg $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ des ARWP (8) mit $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(\overline{\Omega_T})$.

Bew: Seien u_1, u_2 zwei Lsgen.

$$(\partial_t - \Delta)(u_1 - u_2) = 0 \quad \text{in } \Omega_T$$

$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{auf } \Gamma_T$$

$\Rightarrow u_1 - u_2 \leq 0$ in $\overline{\Omega_T}$ & $u_2 - u_1 \leq 0$ in $\overline{\Omega_T}$ $\Rightarrow u_1 \equiv u_2$ ∎

Satz 3.8 (Maxprinzip für das Cauchy-Problem auf $\mathbb{R}^n$)
Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lsg von

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T]$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Falls $\exists a, A > 0: \ u(x,t) \leq A e^{a|x|^2} \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$,

dann
$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 .$$

Bew:

Bem: $(-t)^{n/2} e^{-|x|^2/4t}$ löst $\partial_t u = \Delta u$ für $t < 0$

a) angenommen $T > 0$ erfüllt $4aT < 1$.

Sei $w(x,t) := \frac{K}{(T-t)^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4(T-t)}}$ für $t \in (-\infty, T)$ mit $K > 0$.

w löst $\partial_t u = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times (-\infty, T)$ (also auch auf $\mathbb{R}^n \times [0, T/2]$)

- $v := u - w$ löst $\partial_t u = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times [0, T/2]$
- $v(x,0) = u(x,0) - \frac{K}{T^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4T}} \leq u(x,0) = u_0(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 =: M$

Für $|x| = r$, $t \in [0, T/2]$ ist

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{K}{(T-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T-t)}}$$
$$\leq u(x,t) - \frac{K}{T^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4T}}$$
$$\leq A e^{ar^2} - \frac{K}{T^{n/2}} e^{r^2/4T} \to -\infty \quad (r \to \infty)$$

weil $a < \frac{1}{4T}$

d.h. $\exists\, r_0 > 0$: $\quad v(x,t) \le M \quad$ falls $|x| \ge r_0$, $t \in [0, \frac{T}{2}]$ $\qquad (*)$

Sei $\Omega := B_{r_0}(0)$. Dann $v \le M$ auf $\Gamma_{\frac{T}{2}}$.

$$\overset{\text{Max-Prinz.}}{\Longrightarrow} \quad v \le M \text{ auf } \Omega_{\frac{T}{2}} \overset{(*)}{\Longrightarrow} v \le M \text{ auf } \mathbb{R}^n \times [0, \tfrac{T}{2}]$$
$$\overset{\lambda \to 0}{\Longrightarrow} u \le M \text{ auf } \mathbb{R}^n \times [0, \tfrac{T}{2}]$$

b) Erweiterung auf $[0,T]$ ohne $4aT < 1$

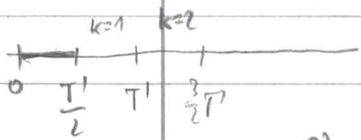
Sei $T' := \frac{1}{8a}$. Nach a) ist $u \le M$ auf $\mathbb{R}^n \times [0, \frac{T'}{2}]$

Idee: wiederholte Fortsetzung um Intervalle der Länge $T'/2$.

Sei $u^{(1)}(x,t) := u(x, t + \frac{T'}{2})$.

$u^{(1)}$ löst $\partial_t u = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times [0, T - \frac{T'}{2}]$

$$\underbrace{u^{(1)}(x,0)}_{= u_0^{(1)}(x)} = u(x, \tfrac{T'}{2}) \le M$$



$$\overset{a)}{\Longrightarrow} \quad \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T'/2]} u^{(1)} = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0^{(1)}, \text{ d.h. } u \le M \text{ auf } \mathbb{R}^n \times [0, T']$$

Induktion: $\quad u^{(k)}(x,t) := u^{(k-1)}(x, t + \frac{T'}{2})$, $\quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, \frac{T'}{2}]$

$$u_0^{(k)}(x) := u^{(k)}(x,0) = u^{(k-1)}(x, \tfrac{T'}{2}) \le M$$

$$\overset{a)}{\Longrightarrow} \quad \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T'/2]} u^{(k)} = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0^{(k)}, \text{ d.h. } u \le M \text{ auf } \mathbb{R}^n \times [0, (k+1)\tfrac{T'}{2}]$$

$\hookrightarrow$ so viele Schritte bis $(k+1)\frac{T'}{2} \ge T$. $\blacksquare$

<u>Korollar 3.9</u> (Eindeutigkeit für das Cauchy-Problem auf $\mathbb{R}^n$)

Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ beschr., $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, $T > 0$. Dann ex. höchstens eine Lsg $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ von

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T]$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

welche die Beding.

(WB) $\qquad \exists\, a, A > 0: \quad |u(x,t)| \le A e^{a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$

erfüllt.

Bew: Seien u_1, u_2 Lsgen mit (WB)

$V := u_1 - u_2$ erfüllt (WB) und $\partial_t u = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times [0,T]$

$u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\overset{S.3.8}{\Rightarrow} \quad V \equiv 0$ ∎

Bem: Ohne (WB) gibt es ∞-viele kl. Lsgen von $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, $u(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
cf. [John, Partial Diff. Eqs.]

Mittelwerteigenschaft, starkes Max-Prinzip

Def: (Wärmekugel)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $r > 0$.

$$E(x_0,t_0,r) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : s \leq t_0,\ H(x_0-y, t_0-s) \geq r^{-n}\}$$

heißt die Wärmekugel um (x_0,t_0) mit Radius r.

Bem: 1) $E(x_0,t_0,r) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,t_0] : |x_0-y|^2 \leq -2n(t_0-s)\log\left(\frac{4\pi(t_0-s)}{r^2}\right)\}$

d.h. E = Kugel mit s-abhängigem Radius

2) $E(x_0,t_0,r) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times [t_0 - \frac{r^2}{4\pi}, t_0] : |x_0-y|^2 \leq \ \ldots \}$

falls $t_0 > \frac{r^2}{4\pi}$

weil $\frac{4\pi(t_0-s)}{r^2} \leq 1 \iff s \geq t_0 - \frac{r^2}{4\pi}$

4) $H(x_0-y, t_0-s) \to \delta_{x_0}$ $(s \to t_0-)$ $\Rightarrow (y,s) \in \mathbb{R}^n \times \{t_0\} \cap E = \{(x_0,t_0)\}$

und $H(x_0-y, t_0-s) = r^{-n} \quad \forall (y,s) \in \partial E$ falls $t_0 > \frac{r^2}{4\pi}$

3) Visualisierung in 1D: Seite 60,5

Lemma 3.10 Sei $r^2 \leq 4\pi t_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$I := \int_{E(x_0,t_0,r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, d(y,s) = 4r^n.$$

Bew:

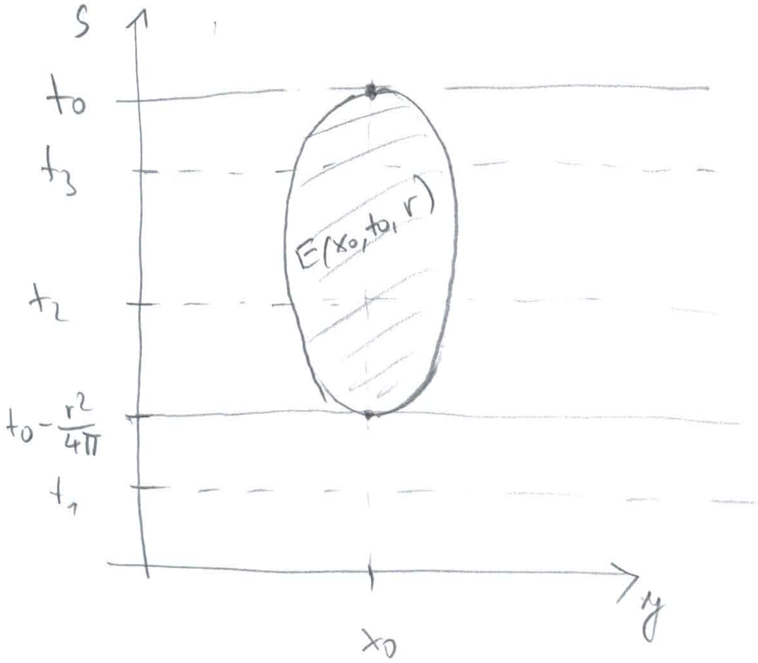
$$I = \int_{t_0-\frac{r^2}{4\pi}}^{t_0} \int_{B_{\rho(s)}(x_0)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, dy\, ds, \quad \rho(s) = \left(-2n(t_0-s)\log\left(\frac{4\pi(t_0-s)}{r^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

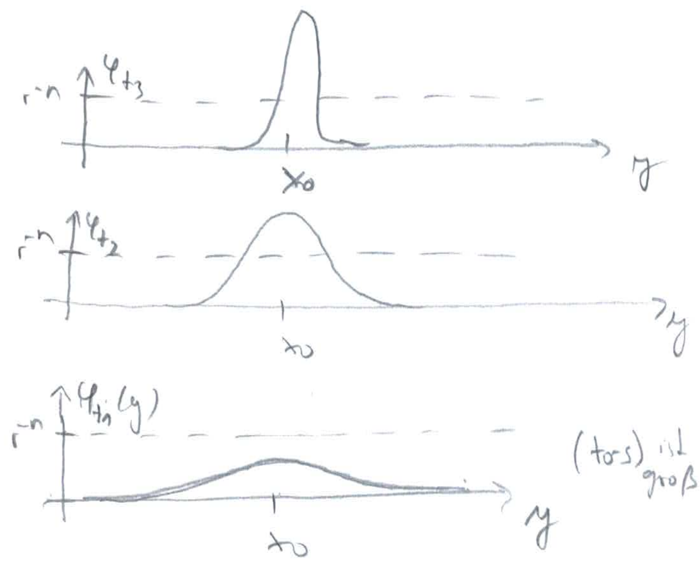
$$\int_{B_{\rho(s)}(x_0)} |x_0-y|^2\, dy = |S^{n-1}| \int_0^{\rho(s)} r^{n-1} r^2\, dr = \frac{\rho^{n+2}|S^{n-1}|}{n+2}$$

<u>Wärmekugel</u> – Visualisierung in 1D

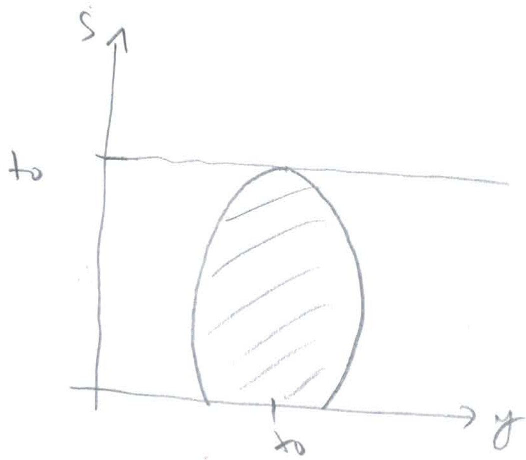
$$H(x_0-y,\, t_0-s) = (4\pi(t_0-s))^{-n/2}\, e^{-\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}} =: \varphi_s(y)$$

<u>Bem:</u> $H(x,t) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_x$ für $t \to 0+$





Für $t_0 < \frac{r^2}{4\pi}$:



$$I = \frac{|S^{n-1}|}{n+2} \int_{t_0 - \frac{r^2}{4\pi}}^{t_0} \left(-2n(t_0-s)\log\left(\frac{4\pi(t_0-s)}{r^2}\right)\right)^{\frac{n+2}{2}} (t_0-s)^{-2}\, ds$$

$$= \frac{|S^{n-1}|}{n+2} \frac{r^2}{4\pi} \int_0^1 \left(\frac{nr^2}{2\pi}\right)^{\frac{n+2}{2}} (-\tau \log \tau)^{\frac{n+2}{2}} \left(\frac{4\pi}{\tau r^2}\right)^2 d\tau \quad \left(\tau := \frac{4\pi(t_0-s)}{r^2}\right)$$

$$= \frac{|S^{n-1}|}{n+2} r^n n^{\frac{n+2}{2}} 2^{\frac{2-n}{2}} \pi^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int_0^1 \tau^{\frac{n-2}{2}} \left(\log \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{n+2}{2}} d\tau}_{=: \tilde{I}}$$

$$\tilde{I} \underset{\substack{z = \log \frac{1}{\tau} \\ dz = -e^{z} d\tau}}{=} \int_0^\infty e^{-\frac{n}{2}z} z^{\frac{n+2}{2}} dz = \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{n+4}{2}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n+2}{2}} ds}_{= \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)}$$

Gamma-Funktion: $\Gamma(a) := \int_0^\infty s^{a-1} e^{-s} ds, \quad a > 0$

Fakten: $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a), \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2\pi^{n/2}}{|S^{n-1}|}$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{n+4}{2}} \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{n+2}{2}} \frac{n+2}{2} \cdot \frac{2\pi^{n/2}}{|S^{n-1}|}$$

$$\Rightarrow I = 4r^n \qquad \blacksquare$$

Satz 3.11 (Mittelwerteigenschaft)

Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ Lsg von $u_t = \Delta u$ in Ω_T. Sei $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, $r^2 \leq 4\pi t_0$ und $E(x_0, t_0, r) \subset \Omega_T$. Dann

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(x_0,t_0,r)} u(y,s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0-s)^2} d(y,s)$$

Bew: OBdA sei $x_0 = 0$. Sonst betrachte $\tilde{u}(x,t) := u(x - x_0, t)$ auf $\Omega - x_0$.

Sei $\varphi(r) := \frac{1}{4r^n} \int_{E(0,t_0,r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{(t_0-s)^2} d(y,s)$, $E := E(0, t_0, r)$

Ziel: $\varphi'(r) = 0$.

$$\text{Dann } \varphi(r) \overset{(\varphi \text{ konst.})}{=} \lim_{\rho \to 0} \varphi(\rho) = u(x_0,t_0) \underbrace{\lim_{\rho \to 0} \int_{E(0,t_0,\rho)} \frac{|y|^2}{(t_0-s)^2} d(y,s) \cdot \frac{1}{4\rho^n}}_{=1}$$

$$+ \lim_{\rho \to 0} \int_{E(0,t_0,\rho)} \underbrace{u(y,s) - u(x_0,t_0)}_{1 \cdot 1 \to 0 \ (\rho \to 0)} \frac{|y|^2}{(t_0-s)^2} d(y,s) \frac{1}{4\rho^n}$$

$= u(x_0, t_0)$

Also z.z. $\varphi'(r) = 0$.

Problem: E hängt von r ab.

$\hookrightarrow$ transformiere $\quad \xi := \frac{y}{r}, \quad \tau := \frac{t_0 - s}{r^2} \Rightarrow d(y,s) = r^{n+2} d(\xi,\tau)$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{1}{4} \int_{E_1} u(r\xi, t_0 - r^2\tau) \frac{|\xi|^2}{\tau^2} \, d(\xi,\tau)$$

$$E_1 = \left\{ (\xi,\tau) : \ 0 < \tau < \frac{1}{4\pi}, \ (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\tau}} \geq 1 \right\}$$

$$\varphi'(r) = \frac{1}{4} \int_{E_1} \left[(\nabla u)(r\xi, t_0 - \tau r^2) \cdot \xi - 2r\tau (\partial_s u)(r\xi, t_0 - r^2\tau) \right] \frac{|\xi|^2}{\tau^2} \, d(\xi,\tau)$$

$$= \frac{1}{4r^{n+1}} \int_E \left[\nabla u(y,s) \cdot y - 2(t_0 - s) \partial_s u(y,s) \right] \frac{|y|^2}{(t_0-s)^2} \, d(y,s)$$

$$=: A - B$$

Sei $h(y,s) := -\frac{n}{2}\log(4\pi(t_0-s)) - \frac{|y|^2}{4(t_0-s)} + n \log r$

sodass $\quad H(y, t_0 - s)\, r^n = e^{h(y,s)}$

Bem: 1) $H(y, t_0 - s) = r^{-n}$ auf $\partial E \Rightarrow h = 0$ auf ∂E

2) $\nabla h(y,s) = -\frac{y}{2(t_0-s)}$

$$B = \frac{1}{2r^{n+1}} \int_E \frac{|y|^2}{t_0 - s} \partial_s u(y,s) \, d(y,s) = -\frac{1}{r^{n+1}} \int_E y \cdot (\nabla h(y,s)) \partial_s u(y,s) \, d(y,s)$$

$$\underset{(h=0 \text{ auf } \partial E)}{\overset{(\text{P.I. in } y)}{=}} \frac{1}{r^{n+1}} \int_E \left(n h \partial_s u + y \cdot (\nabla \partial_s u) h \right) d(y,s)$$

$$\underset{(\text{am 2. Term})}{\overset{(\text{P.I. in } s)}{=}} \frac{1}{r^{n+1}} \int_E \left(n h \partial_s u - y \cdot \nabla u \, \partial_s h \right) d(y,s)$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \int_E n h \partial_s u - y \cdot \nabla u \left(\frac{n}{2(t_0-s)} - \frac{|y|^2}{4(t_0-s)^2} \right) d(y,s)$$

$$= A + \frac{1}{r^{n+1}} \int_E \Big(n h \underbrace{\partial_s u}_{= \Delta_y u} - \frac{n}{2(t_0-s)} \nabla u \cdot y \Big) \, d(y,s)$$

$$\Rightarrow \varphi'(r) = -\frac{1}{r^{n+1}} \int_E \left(n h \Delta_y u - \frac{n}{2(t_0-s)} \nabla u \cdot y \right) d(y,s)$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{r^{n+1}} \int_E \underbrace{-n \underbrace{\nabla_y h}_{= -\frac{y}{2(t_0-s)}} \cdot \nabla_y u - \frac{n}{2(t_0-s)} \nabla_y u \cdot y}_{=0} \, d(y,s) = 0$$

$\blacksquare$

Satz 3.12 (starkes Max-Prinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet, $T>0$ und $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ eine Lsg von $\partial_t u = \Delta u$ in Ω_T. Falls $\exists (x_0,t_0) \in \Omega_T$:

$$u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u,$$

dann $\quad u \equiv \text{const.}$ auf $\overline{\Omega_{t_0}}$.

Bem: 1) Das Gleiche gilt für das Minimum

2) $u \equiv \text{const}$ auf $\overline{\Omega_T}$ gilt im Allgem. nicht.

Bsp: Sei $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ und

$$u(x,t) := \begin{cases} 0, & x \in \overline{\Omega} \times [0,t_0] \\ -(4\pi(t-t_0))^{-n/2} e^{\frac{-|x-x_1|^2}{4(t-t_0)}}, & x \in \overline{\Omega}, t>t_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ löst $u_t = \Delta u$ auf $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$

Für $T>t_0$ ist

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = 0 \quad \text{und} \quad u \equiv 0 \text{ auf } \overline{\Omega_{t_0}}$$

$$\text{aber } u \not\equiv 0 \text{ auf } \Omega_T.$$

Bew: Seien $y_0 \in \Omega$, $s_0 \in (0,t_0)$ beliebig.

z.z: $u(y_0,s_0) = u(x_0,t_0) := M \quad (= \max_{\overline{\Omega_T}} u)$

$\hookrightarrow$ dann $u \equiv M$ auf $\text{int}(\Omega_{t_0})$ und wegen Stetigkeit auch auf $\overline{\Omega_{t_0}}$

Sei $\gamma: [0,1] \to \Omega$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$.

und sei $\tilde{\gamma}: \begin{cases} [0,1] \to \Omega_{t_0} \\ \xi \mapsto (\gamma(\xi), \xi s_0 + (1-\xi)t_0) \end{cases}$ $\quad$ ($\tilde{\gamma}$ verbindet (x_0,t_0) mit (y_0,s_0))

$$\xi_0 := \max\{\xi \in [0,1] : u(\tilde{\gamma}(\eta)) = M \quad \forall \eta \in [0,\xi]\}$$

z.z: $\xi_0 = 1$

Annahme: $\xi_0 < 1$. $\quad (x_1,t_1) := \tilde{\gamma}(\xi_0)$

Betrachte die Wärmekugel $E(x_1,t_1,r)$ mit $r>0$ so klein, dass $E \subset \Omega_{t_0}$.

$$\text{MWE} \Rightarrow M = u(x_1,t_1) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(x_1,t_1,r)} \underbrace{u(y,s)}_{\leq M} \frac{|x_1-y|^2}{(t_1-s)^2} \, d(y,s) =: I$$

Falls $u(y,s) < M$ irgendwo in E, dann

$$I < M \underbrace{\frac{1}{4r^n} \int_E \frac{|x_1-y|^2}{(t_1-s)^2} \, d(y,s)}_{=1} = M \qquad \rightarrow\leftarrow$$

Also $u \equiv M$ in E

$$\Rightarrow u(\tilde{y}(s)) = M \text{ für } s \in [s_0, s_0+\varepsilon] \text{ für ein } \varepsilon > 0$$

$\rightarrow\leftarrow$ (zu $s_0 < 1$) ∎

<u>Bem</u>: (Die Wärmeleitungsgleichung hat „unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit")

1) Betrachte für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet, $T>0$

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \Omega_T$$
$$u = g \quad \text{auf } \Gamma_T$$

Sei $g \geq 0$ und $g(x_0, 0) > 0$ für ein $x_0 \in \Omega$.

Min-Prinzip $\Rightarrow$ $u \geq 0$ in Ω_T

<u>Beh</u>: $u > 0$ in Ω_T

<u>Bew</u>: Angenommen $u(x_1, t_1) = 0$ für ein $(x_1, t_1) \in \Omega_T$

d.h. $u(x_1, t_1) = \min\limits_{\Omega_T} u = 0 \overset{S.3.12}{\Longrightarrow} u \equiv 0$ in $\overline{\Omega_{t_1}}$

$\Rightarrow u(x_0, 0) = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$ ∎

Also die Lsg wird sofort positiv überall (auch wenn $\text{supp}(u(\cdot,0)) \subset\subset \Omega$)

2) Die beschr. Lsg des Cauchy-Problems in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) \, dy$$

erfüllt dies (für $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$) auch, d.h. $u(x,t) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$.

Eindeutigkeit-Beweis mittels Energiemethode

Proposition 3.13 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Lip.-Gebiet, $T > 0$, $f \in C(\overline{\Omega_T})$ und $g \in C(\overline{\Gamma_T})$. Dann gibt es höchstens eine $C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$ Lösung von

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T. \end{aligned}\right\} (*)$$

(d.h. im Wesentlichen Satz 3.7 für Lip-Gebiete)

Bew: Seien u_1, u_2 zwei Lsgen, $v := u_1 - u_2$ erfüllt $(*)$ mit $f=0$, $g=0$.

Sei $e(t) := \int_\Omega v^2(x,t)\,dx$, $t \in [0,T]$.

$$e'(t) = 2\int_\Omega v(x,t)\,\partial_t v(x,t)\,dx$$

($v\partial_t v$ stetig auf $\overline{\Omega}$ $\Rightarrow$ gleichm. stetig $\Rightarrow$ Ableiten unter $\int$ OK)

$$= 2\int_\Omega v(x,t)\,\Delta v(x,t)\,dx$$

$$= -2\int_\Omega |\nabla v(x,t)|^2\,dx + 2\int_{\partial\Omega} \underbrace{v(x,t)}_{=0} \nabla v(x,t)\cdot \nu(x)\,dS(x)$$

$$\leq 0$$

$$\left.\begin{aligned} e(0) &= 0 \\ e'(t) &\leq 0 \\ e(t) &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow v \equiv 0$$

$\blacksquare$

Bem: Energiemethode = Reduktion zu einer ODE für eine „Energie"
↳ oft äquivalent zum Testen der PDE mit der Lsg u selber

3.5 Regularität

Wir wissen schon: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ für das homogene Cauchy-Problem auf $\mathbb{R}^n$ mit $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

hier: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

Satz 3.14 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. und $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ eine Lsg

von $\partial_t u = \Delta u$ in Ω_T.

Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega_T)$.

Bem: Die Daten auf Γ_T müssen nicht glatt sein.

Bew: Sei $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ beliebig.

Betrachte den Zylinder

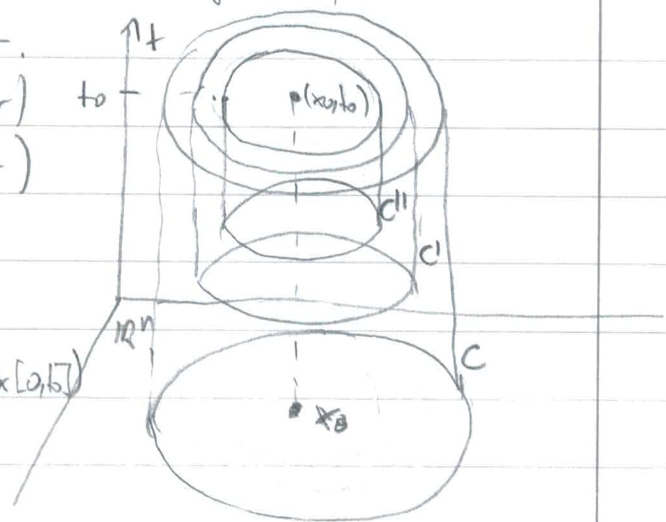
$C := C(x_0, t_0, r) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,T] : |x_0 - y| \leq r,\ t_0 - r^2 \leq s \leq t_0\}$.

mit $r > 0$ s.d. $C \subset\subset \Omega_T$.

Sei auch $C' := C(x_0, t_0, \frac{3}{4}r)$

$C'' := C(x_0, t_0, \frac{1}{2}r)$

Ziel: $u \in C^\infty(C'')$



wähle Abschneidefunktion $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,t_0])$

mit
- $0 \leq \xi \leq 1$
- $\xi \equiv 1$ auf C'
- $\xi \equiv 0$ in $(\mathbb{R}^n \times [0,t_0]) \setminus C$

Sei $v := \begin{cases} \xi u & \text{in } \Omega_T \\ 0 & \mathbb{R}^n \times [0,t_0] \setminus \Omega_T \end{cases}$

$$(*) \begin{cases} v(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t v - \Delta v = (\partial_t \xi) u - (\Delta \xi) u - 2 \nabla \xi \cdot \nabla u + \xi \underbrace{(\partial_t u - \Delta u)}_{\equiv 0} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,t_0] \\ \qquad =: \tilde{f} & \end{cases}$$

- $\tilde{f}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in C'' \cup (\mathbb{R}^n \times [0,t_0]) \setminus C$ (**)
- $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}^n \times [0,t_0])$

$\underset{\text{S.3.4, Kor. 3.9}}{\Longrightarrow}$ die eindeutige beschr. Lsg von $(*)$ ist

$$\tilde{v}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y, t-s) \tilde{f}(y,s) \, dy \, ds$$

($\tilde{v}$ beschränkt wegen (**))

Also $v \equiv \tilde{v}$.

Wegen $v \equiv u$ in C'' ist für $(x,t) \in C''$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t-s)(\partial_s \xi - \Delta \xi)(y,s)\, u(y,s)\, dy\, ds$$

$$-2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t-s) \nabla \xi(y,s) \cdot \nabla u(y,s)\, dy\, ds$$

$$\underset{\text{P.I. in } y}{\overset{\xi \equiv 0 \text{ außerhalb } C}{=}} \int_C \left[H(x-y,t-s)(\partial_s \xi + \Delta \xi)(y,s) + 2 \nabla_y H(x-y,t-s) \cdot \nabla_\xi (y,s) \right] \cdot u(y,s)\, d(y,s)$$

$$\underset{\xi \text{ konst. in } C'}{=} \int_{C \setminus C'} [\dots]\, u(y,s)\, d(y,s)$$

- $(y,s) \in C \setminus C'$, $(x,t) \in C''$ $\Rightarrow$ $|x-y|$ und $|t-s|$ bleiben weg von 0

$\Rightarrow (x,t) \mapsto H(x-y,t-s) \in C^\infty(C'')$

$\overset{\text{gleichm.}}{\underset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow}} \quad u \in C^\infty(C'')$ ▣

3.6 Lösung durch Eigenfunktion Entwicklung

Inhomogenes ARWP mit Dirichlet-RB: ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet)

(andere RB möglich)

$$(9) \begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = h(x), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Daten: Ω, f, h, u_0

notwendige Bedingung der AB: $u_0(x) = h(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$

(sonst $u \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ unmöglich)

<u>Verfahren - Schema</u> (vgl. Kap 2.1)

I) homogene RB: $u_H(x,t) = 0$, $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)$

1) Eigenwert-Problem

$$-\Delta w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \Omega$$
$$w(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega$$

↳ Eigenpaare $(\lambda_k, w_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ (gefunden z. B. mit Separ. der Variablen falls $n \geq 2$ und Ω einfach)

2) Entwicklung von $f(\cdot,t)$, u_0, $u_H(\cdot,t)$

$$f(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(t)\, w_k(x), \quad u_0(x) = \sum_k u_{0,k}\, w_k(x)$$

$$u_H(x,t) = \sum_k u_k(t)\, w_k(x) \qquad (u_k(t) \text{ zu bestimmen})$$

3) Bestimmen von u_k

$$\partial_t \sum_k u_k(t)\, w_k(x) + \sum_k \lambda_k u_k(t)\, w_k(x) = \sum_k f_k(t)\, w_k(x)$$
$$\sum_k u_k(0)\, w_k(x) = \sum_k u_{0,k}\, w_k(x)$$

Koeffizienten-Vergleich:

$$(10)\begin{cases} u_k' + \lambda_k u_k = f_k, & t\in(0,\infty),\ k\in\mathbb{N} & (a)\\ u_k(0) = u_{0,k}, & k\in\mathbb{N} & (b)\end{cases}$$

(10) = ODE für u_k

Lösung mit Variation der Konstanten:

- alle Lsgen von (a): $c e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau$
- Lsg von (*): $u_k(t) = u_{0,k} e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau$

II) Dirichlet Laplace-Problem

$$-\Delta v(x) = 0, \quad x\in\Omega$$
$$v(x) = h(x), \quad x\in\partial\Omega$$

↳ gelöst mit
- Separation der Variablen für einfache Ω
- Perron Verfahren

III) volles Problem (9)

$$u(x,t) = \tilde{u}_H(x,t) + v(x),$$ wobei $\tilde{u}_H$ die Lsg von (I) mit $u_0(x) - v(x)$ ist

1D-Fall im Detail (mit homogenen RB)

Sei $\Omega = (0,\pi)$ und betrachte

$$(11) \quad \begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = f(x,t) & , (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & , x \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} \text{mit } u_0 \text{ und } f(\cdot,t) \text{ stetig und stückweise } C^1 \text{ für alle } t \geq 0, \\ u_0(0) = u_0(\pi) = 0 \;,\; f(0,t) = f(\pi,t) = 0 \quad \forall\, t > 0. \end{cases}$$

1) EW-Problem

$$\left.\begin{aligned} -\partial_x^2 w &= \lambda w, \quad x \in (0,\pi) \\ w(0) &= w(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_k(x) = \sin(kx), \quad \lambda_k = k^2 \;,\; k \in \mathbb{N}$$

2) Entwicklung

$$(*) \overset{\text{Korollar 1.3}}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} u_{0,k} \sin(kx) \\ f(x,t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(t) \sin(kx) \end{aligned}\right\} \text{ mit gleichm. (bzgl } x) \text{ Konvergenz}$$

wobei
$$u_{0,k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(x) \sin(kx)\,dx$$
$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x,t) \sin(kx)\,dx.$$

3) Lösungs-Darstellung

$$(12) \quad u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(u_{0,k} e^{-k^2 t} + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau \right) \sin(kx)$$

Satz 3.15 Sei $f, \partial_t f \in C([0,\pi] \times [0,\infty))$, $u_0 \in C([0,\pi])$, $u_0(0) = u_0(\pi) = f(0,t) = f(\pi,t) = 0 \quad \forall\, t > 0$ und $u_0, f(\cdot,t), \partial_t f(\cdot,t)$ seien stückweise C^1 für alle $t \geq 0$. Dann ist u in (12) eine klass. Lsg von (11). Also $u \in C^{2,1}((0,\pi)\times(0,\infty)) \cap C([0,\pi]\times[0,\infty))$.

Bew: $S_N(x,t) := \sum_{k=1}^{N} \left(u_{0,k} e^{-k^2 t} + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau \right) \sin kx \quad , N \in \mathbb{N}$

1) z.z. $u \in C([0,\pi]\times[0,\infty))$ & AB gilt

Sei $T>0$.

$$|S_N(x,t)| \le \sum_{k=1}^{N}|u_{0k}| + \sum_{k=1}^{N}\int_0^t |f_k(\tau)|\,d\tau$$

Beh: rechte Seite konv. glm. auf $[0,T]$

Bew (i) $f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,t)\sin(kx)\,dx$ stetig auf $[0,T]$, da f glm. stetig auf $[0,\pi]\times[0,T]$

- $\forall t\in[0,T]\ \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon,t)$: $\sum_{k=N+1}^{\infty}|f_k(t)| < \varepsilon$ (da $f(\cdot,t)$ stückw. C^1 $\forall t\ge 0$)

wähle $N_* := \max_{t\in[0,T]} N(t,\frac{\varepsilon}{T})$

Dann $\sum_{k=N_*+1}^{\infty}\int_0^t |f_k(\tau)|\,d\tau = \int_0^t \sum_{k=N_*+1}^{\infty}|f_k(\tau)|\,d\tau \le T\cdot\frac{\varepsilon}{T} = \varepsilon$ $\quad \forall t\in[0,T]$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}|u_{0,k}|$ konvergiert (da u_0 stückweise C^1) ∎

Also S_N konv. glm. auf $[0,\pi]\times[0,T]$ $\Rightarrow u\in C([0,\pi]\times[0,T])$

$\overset{T \text{ belieb.}}{\Rightarrow} u\in C([0,\pi]\times[0,\infty))$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0+} u(x,0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_{0,k}\sin(kx) = u_0(x) \quad \forall x\in[0,\pi].$$

2) z.z. $u\in C^{2,1}([0,\pi]\times(0,\infty))$ & $\partial_t u - \partial_x^2 u = f$

Sei $T>0$.

$$\partial_t S_N = \sum_{k=1}^{N}\left[-k^2 u_{0k}e^{-k^2t} + f_k(t) - k^2\int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau\right]$$

(i) $\sum_k |u_{0k}|\,k^2 e^{-k^2t}$ konv. glm. auf $[\delta,\infty)$ $\forall\delta>0$

(ii) $\left|\sum_k \int_0^t k^2 e^{-k^2(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau\right| = \left|\sum_k \underbrace{e^{-k^2(t-\tau)}f_k(\tau)\Big|_0^t}_{=f_k(t)-e^{-k^2t}f_k(0)} + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} f_k'(\tau)\,d\tau\right|$

$$\le \sum_k\left(|f_k(t)| + |f_k(0)|\right) + \underbrace{\sum_k\int_0^t |f_k'(\tau)|\,d\tau}$$

konv. glm. auf $[0,T]$ - analog zu 1) da $\partial_t f(\cdot,t)$ stückw. C^1

(i), (ii) $\overset{T \text{ belieb.}}{\Longrightarrow}$ $\partial_t u\in C([0,\pi]\times(0,\infty))$

Analog $\partial_x u,\ \partial_x^2 u\in C([0,\pi]\times(0,\infty))$.

$\partial_t u - \partial_x^2 u = f$ per Konstruktion, da gliedweise Ableiten erlaubt. ∎

Nachtrag: Existenz von Lsgen der Wärmeleitungsgl. auf allgemeinem Gebiet Ω:

Satz 3.16 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. C^2-Gebiet, $f \in C(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$, $h \in C(\partial\Omega \times [0,\infty))$, $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ und $u_0(x) = h(x,0)$ $\forall x \in \partial\Omega$.
Dann gibt es eine eindeutige klass. Lsg ($u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,\infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$) von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u &= h && \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

nämlich

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega H_\Omega(x,y,t-\tau) f(y,\tau)\, dy\, d\tau + \int_\Omega H_\Omega(x,y,t)\, u_0(y)\, dy$$
$$- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial H_\Omega}{\partial \nu_y}(x,y,t-\tau)\, h(y,\tau)\, ds(y)\, d\tau,$$

wobei H_Ω der „Wärmeleitungskern zu Ω" ist.

Bew: [Jost, PDEs, Sec. 4.3]

Bem: H_Ω ist $H_\Omega: \bar{\Omega}^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

- $(\partial_t - \Delta) H_\Omega(x,y,t) = 0$, $(x,y,t) \in \Omega^2 \times (0,\infty)$
- $H_\Omega(x,y,t) = 0$, $(x,y,t) \in \partial\Omega \times \Omega \times (0,\infty)$
- $\lim_{t\to 0} \int_\Omega H_\Omega(x,y,t) f(x)\, dx = f(y)$ $\forall y \in \Omega$ $\forall f \in C(\Omega)$.

4. Transport- und Wellengleichung

4.1 Transportgleichung

Für $c \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachte

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u(x,t) + c \cdot \nabla u(x,t) = f(x,t) \quad , & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad , & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Herleitung von (1):

Aus Kap. 1.1. wissen wir: Massenerhaltung eines Stoffes impliziert

$$\partial_t u + \nabla \cdot j = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$$

wobei $u =$ Konzentration $\quad (u: \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R})$

$j =$ Stofffluss

$f =$ Stoffzufuhr

Beim reinen Transport: $j = c\,u$ mit $c \in \mathbb{R}^n$ konstant!

$$\Rightarrow \quad \partial_t u + c \cdot \nabla u = f$$

a) homogener Fall $(f \equiv 0)$

Satz 4.1: Falls $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $u(x,t) := u_0(x - ct)$ die eindeutige $C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Lsg von (1) mit $f \equiv 0$.

Bew: Offenbar ist u Lsg. $\quad (\partial_t u = -c \cdot \nabla u_0,\ c \cdot \nabla u = c \cdot \nabla u_0)$

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{u}$ eine Lsg und $t_* \geq 0$. Betrachte $z: \begin{cases} [-t_*, \infty) \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \tilde{u}(x + ct, t_* + t) \end{cases}$

$$\frac{dz}{dt} = c \cdot \nabla \tilde{u}(x+ct, t_*+t) + \partial_t \tilde{u}(x+ct, t_*+t) \overset{(1)}{=} 0$$

$\Rightarrow$ z konstant

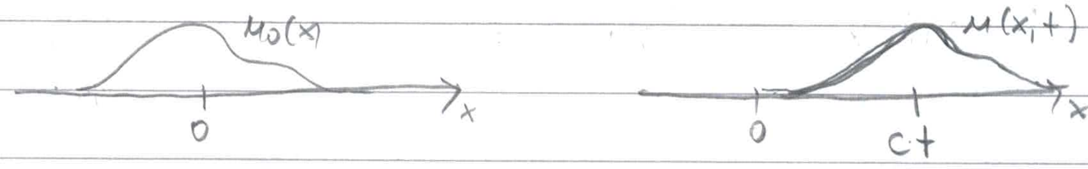
d.h. $\tilde{u}$ konstant entlang von Geraden $t \mapsto (x + ct, t_* + t)$

Wegen $z(0) = \tilde{u}(x, t_*)$ und $z(-t_*) = \tilde{u}(x - c t_*, 0) = u_0(x - c t_*)$ erhalte

$$\tilde{u}(x, t_*) = u_0(x - c t_*).$$

t_* beliebig $\Rightarrow$ $\tilde{u}(x,t) = u_0(x - ct) \quad \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ ∎

<u>$n=1$</u>:



b) Inhomogener Fall

nun ist $\frac{dz}{dt} = f(x + ct, t_* + t)$

$$\Rightarrow \quad z(t) = z(0) + \int_0^t f(x + cs, t_* + s)\, ds \quad , \quad t \geq -t_* \qquad (*)$$

und wieder $z(0) = \tilde{u}(x, t_*)$

$z(-t_*) = u_0(x - c t_*)$

$\underset{(*) \text{ mit } t = -t_*}{\Longrightarrow}$ $u_0(x - c t_*) = \tilde{u}(x, t_*) + \int_0^{-t_*} f(x + cs, t_* + s)\, ds$

$\underset{(\tau := t_* + s)}{=} \tilde{u}(x, t_*) - \int_0^{t_*} f(x + (\tau - t_*)c, \tau)\, d\tau.$

<u>Satz 4.2</u> Sei $f \in C^{1,0}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$u(x,t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(x + (\tau - t)c, \tau)\, d\tau$$

die eindeutige $C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$-Lsg von (1).

<u>Bew:</u> Lsg-Eigenschaft:

$$\partial_t u = -c \cdot \nabla u_0 + f(x,t) - \int_0^t c \cdot \nabla f(x + (\tau - t)c, \tau)\, d\tau$$

$$c \cdot \nabla u = c \cdot \nabla u_0 + \int_0^t c \cdot \nabla f(\quad)\, d\tau$$

<u>Bem.:</u> Ableiten unter $\int$ erlaubt, weil

$\nabla f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \Rightarrow \nabla f(x + (\cdot - t)c, \cdot)$ glchm. stetig auf $[0, t]$

$\forall t \geq 0$.

Eindeutigkeit: Rechnung oben.

4.2. Wellengleichung

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen betrachte

$$(2)\begin{cases} (a) & \partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times [0,\infty) \\ (b) & u(x,0) = g(x), & x \in \Omega \\ (c) & \partial_t u(x,0) = h(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Anwendung-Beispiele – Schwingung einer Saite $(n=1)$ / einer Membrane $(n=2)$

– Druckwellen (z.B. Schall), Wasserwellen, EM-Wellen

– ...

a) Homogene Gl. auf $\mathbb{R}$ $\quad (n=1, \Omega = \mathbb{R}, f \equiv 0)$

Lösung-Darstellung: Sei u eine Lsg von (2).

$$(2a) \iff (\partial_t + \partial_x)\underbrace{(\partial_t - \partial_x) u}_{=: V} = 0$$

Also:

(i) V löst die homog. Transportgl. $\begin{cases} \partial_t V + \partial_x V = 0 \\ V(x,0) = \partial_t u(x,0) - \partial_x u(x,0) = h(x) - g'(x) \end{cases}$

$$\overset{\text{Satz 4.1}}{\Longrightarrow} \quad V(x,t) = h(x-t) - g'(x-t).$$

(ii) u löst die inhomog. Transport gl. $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x u = V \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$

$$\overset{\text{Satz 4.2}}{\Longrightarrow} \quad u(x,t) = g(x+t) + \int_0^t V(x+t-\tau, \tau)\, d\tau$$

$$= g(x+t) + \int_0^t h(x+t-2\tau) - g'(x+t-2\tau)\, d\tau$$

$$\underset{(y := x+t-2\tau)}{=} g(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y)\, dy$$

$$(3) \qquad = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

(3) heißt die d'Alembert-Formel.

Satz 4.3 Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist (3) die eindeutige $C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Lsg von (2).

Bew: Lsg-Eigenschaft:

$$\partial_t^2 u = \tfrac{1}{2}\left(g''(x+t) + g''(x-t)\right) + \tfrac{1}{2}\left(h'(x+t) - h'(x-t)\right) = \partial_x^2 u$$

$$u(x,0) = \tfrac{1}{2}\left(g(x) + g(x)\right) = g(x)$$

$$\partial_t u(x,0) = \tfrac{1}{2}\left(g'(x) - g'(x)\right) + \tfrac{1}{2}\left(h(x) + h(x)\right) = h(x)$$

Eindeutigkeit: Rechnung oben. ∎

Bem: keine Glättung in der Wellengleichung!!
Falls $g \in C^k(\mathbb{R})$, $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, dann $u(\cdot,t) \in C^k(\mathbb{R})$ $\forall t \geq 0$ aber nicht besser. (vgl. Wärmeleitungsgl.)

b) Homogenes Randwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$

($n=1, \Omega = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$)

Betrachte:

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,\infty) \times [0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) = h(x), & x \in (0,\infty) \quad (AB) \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \quad (RB) \end{cases}$$

↳ z.B. schwingende Saite befestigt in $x=0$

Idee: - Erweiterung auf $\mathbb{R}$ durch Spiegelung
- Verwenden der d'Alembert-Formel

Sei $u \in C^{2,2}((0,\infty) \times [0,\infty)) \cap C([0,\infty) \times [0,\infty))$ eine Lsg von (4) und sei

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ -u(-x,t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ -h(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Es gilt 1) $\tilde{u} \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, da

- $\lim_{x \to 0+} \tilde{u}(x,t) = u(0,t) \overset{(RB)}{=} 0 = -u(0,t) = \lim_{x \to 0-} \tilde{u}(x,t)$
- $\lim_{x \to 0-} \partial_x \tilde{u}(x,t) = \lim_{x \to 0-} -(-(\partial_x u)(-x,t)) = \lim_{x \to 0+} \partial_x u(x,t) = \lim_{x \to 0+} \partial_x \tilde{u}(x,t)$
- $\lim_{x \to 0+} \partial_x^2 \tilde{u}(x,t) = \lim_{x \to 0+} \partial_x^2 u(x,t) = \partial_t^2 u(0,t) = 0$ da $u(0,\cdot) \equiv$ konst.

  $\lim_{x \to 0-} \partial_x^2 \tilde{u}(x,t) = -\lim_{x \to 0+} \partial_x^2 u(x,t) = 0$

  t-Ableitungen offenbar stetig

2) $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$, falls $g(0)=0$, $g''(0)=0$
3) $\tilde{h} \in C^1(\mathbb{R})$, falls $h(0)=0$

$\Big\}$ analog zu 1)

$\tilde{u}$ löst

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x^2 \tilde{u} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0,\infty)$$
$$\tilde{u} = \tilde{g}, \; \partial_t \tilde{u} = \tilde{h} \quad \text{in } \mathbb{R} \times \{0\}$$

$\overset{\text{Satz 4.3}}{\Rightarrow}$ $$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

Also
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy, & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)\,dy, & t \geq x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Weil $\int_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)\,dy = \int_{x-t}^{0} -h(-y)\,dy = \int_{t-x}^{0} h(y)\,dy$

<u>Satz 4.4</u> Sei $g \in C^2([0,\infty))$, $h \in C^1([0,\infty))$. Dann u in (5) erfüllt $u \in C^{2,2}([0,\infty) \times [0,\infty))$ und löst (4). Falls $g(0) = g''(0) = 0$ und $h(0)=0$, dann haben alle Lsgen diese Form.

<u>Bew</u>: Lsg-Eigenschaft – direkte Rechnung. Eindeutigkeit oben.

c) Homogene Wellengl. in $\mathbb{R}^2$ & $\mathbb{R}^3$

Ziel: explizite Lsg $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ von

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Def: (Sphärische Mittelwerte)
Seien u stetig in $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, g, h stetig in $\mathbb{R}^n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest.
Für $r > 0$, $t \geq 0$ definiere

$$U(x,r,t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS(y) := \frac{1}{r^{n-1}|S^{n-1}|} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS(y)$$

$$G(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS(y)$$

$$H(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\, dS(y)$$

Bem: 1) $\fint_\Omega f = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f$ heißt Mittelwertintegral (für Volumen- sowie Flächenintegral)

2) $U(x,\cdot,\cdot) \in C((0,\infty) \times [0,\infty))$, $G(x,\cdot), H(x,\cdot) \in C((0,\infty))$ wegen gleichm. Stetigkeit

3) Erweiterung auf $r \in [0,\infty)$:

$$\lim_{r \to 0} U(x,r,t) = u(x,t), \text{ da } u \text{ stetig in } x$$

$$\Rightarrow U(x,\cdot,\cdot) \in C([0,\infty) \times [0,\infty))$$

Analog $G(x,\cdot), H(x,\cdot) \in C([0,\infty))$

Satz 4.5 (Euler-Poisson-Darboux-Gl.)
Sei $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$-Lsg von (6). Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $U(x,\cdot,\cdot) \in C^{2,2}([0,\infty) \times [0,\infty))$ und löst

$$\partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r}\partial_r U = 0 \quad , \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$$
$$U(x,r,0) = G(x,r) \quad , \quad r \geq 0$$
$$\partial_t U(x,r,0) = H(x,r), \quad r \geq 0.$$

Bew:

1) $$U(x,t,r) \underset{\substack{\text{(glchm.} \\ \text{konv. auf} \\ \partial B_r(x_0))}}{\xrightarrow{t \to 0}} \fint_{\partial B_r(x)} \underbrace{u(y,0)}_{=g(y)} \, dS(y) = G(x,r)$$

$$\partial_t U(x,t,r) \underset{\substack{\text{(glchm.} \\ \text{Stetigkeit} \\ \text{von } u, \partial_t u)}}{=} \fint_{\partial B_r(x)} \partial_t u(y,t) \, dS(y) \xrightarrow{t \to 0} \fint_{\partial B_r(x)} h(y) \, dS(y) = H(x,r)$$

$$\partial_t^2 U(x,t,r) = \fint_{\partial B_r(x)} \partial_t^2 u(y,t) \, dS(y)$$

2) r-Ableitungen

$$U(x,t,r) \overset{y=x+rz}{=} \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz,t) \, dS(z)$$

$$\Rightarrow \partial_r U(x,t,r) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial B_1(0)} (\nabla u)(x+rz,t) \cdot z \, dS(z) \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{B_1(0)} \nabla_z \cdot ((\nabla u)(x+rz,t)) \, dz$$

$$= \frac{r}{|S^{n-1}|} \int_{B_1(0)} (\Delta u)(x+rz,t) \, dz = \frac{1}{r^{n-1}|S^{n-1}|} \int_{B_r(x)} \Delta u(y,t) \, dy$$

$\left(r^{n-1}|S^{n-1}| = \frac{n}{r}|B_r(0)| \right)$

$$= \frac{r}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y,t) \, dy \qquad (7)$$

Und
- $\partial_r U(x,t,r) \to 0 \quad (r \to 0)$
- $\frac{\partial_r U(x,t,r)}{r} \to \frac{1}{n} \Delta u(x,t) \quad (r \to 0) \qquad (\Delta u \text{ stetig in } x)$

$$\partial_r^2 U(x,t,r) \overset{\text{Zwiebel}}{=} \partial_r \left(\frac{1}{r^{n-1}|S^{n-1}|} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} \Delta u(y,t) \, dS(y) \, ds \right)$$

$$= \frac{1-n}{r^n|S^{n-1}|} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} \Delta u(y,t) \, dS(y) \, ds + \frac{1}{r^{n-1}|S^{n-1}|} \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y,t) \, dS(y)$$

$$= \frac{1-n}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y,t) \, dy + \fint_{\partial B_r(x)} \Delta u(y,t) \, dS(y) \qquad (8)$$

$$\lim_{r\to 0} \partial_r^2 U(x,t,r) = \left(\frac{1-n}{n}+1\right)\Delta u(x,t) = \frac{1}{n}\Delta u(x,t)$$

Also $U \in C^{2,2}([0,\infty)\times[0,\infty))$ und

(*) $$\partial_r^2 U + \frac{n-1}{r}\partial_r U = \underset{\partial B_r(x)}{⨍} \underbrace{\Delta u(y,t)}_{=\partial_t^2 u(y,t)}\, dS(y) = \partial_t^2 U \quad , r>0,\ t\geq 0$$

$\partial_t^2 U, \partial_r^2 U, \frac{1}{r}\partial_r U$ stetig bzgl r auf $[0,\infty)$ $\Rightarrow$ (*) gilt auch in $r=0$ ∎

<u>Korollar 4.6</u> $(n=3)$

Sei $u\in C^{2,2}(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$ eine Lsg von (6) und

$\tilde{U}(x,r,t) := rU(x,r,t)$, $\tilde{H}(x,r) := rH(x,r)$, $\tilde{G}(x,r) := rG(x,r)$, $x\in\mathbb{R}^3$, $r,t\geq 0$.

Dann gilt für jedes $x\in\mathbb{R}^3$:

$\tilde{U}(x,\cdot,\cdot)\in C^{2,2}([0,\infty)\times[0,\infty))$ und

(9) $$\begin{cases} \partial_t^2\tilde{U} - \partial_r^2\tilde{U} = 0 & \text{in } [0,\infty)\times[0,\infty) \\ \tilde{U}(x,r,0) = \tilde{G}(x,r) & , r\geq 0 \\ \partial_t\tilde{U}(x,r,0) = \tilde{H}(x,r) & , r\geq 0 \\ \tilde{U}(x,0,t) = 0 & , t\geq 0. \end{cases}$$

<u>Bew:</u> $\partial_t^2\tilde{U} = r\partial_t^2 U = r(\partial_r^2 U + 2\partial_r U) = \partial_r^2(rU) = \partial_r^2\tilde{U}$ ✓

AB & RB klar ∎

<u>Satz 4.7</u> (Wellengl.-Lsg in $\mathbb{R}^3$)

Sei $g\in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h\in C^2(\mathbb{R}^3)$ und

(10) $$u(x,t) := \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} th(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\, dS(y), \quad x\in\mathbb{R}^3, t\geq 0.$$

Dann (i) $u\in C^{2,2}(\mathbb{R}^3\times(0,\infty))$

(ii) $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3\times(0,\infty)$

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x_0)$

(iv) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} \partial_t u(x,t) = h(x_0)$

$\Big\}\ \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^3$

(v) Jede $C^{2,2}$-Lsg hat die Form (10).

Bew: (v): Sei u ein $C^{2,2}$-Lsg und $\tilde{U}, \tilde{G}, \tilde{H}$ wie im Koroll. 4.6

- $\tilde{G}(x,0) = \tilde{H}(x,0) = 0$ (klar)
- $\partial_r^2 \tilde{G}(x,r) = 2\partial_r G(x,r) + r\,\partial_r^2 G(x,r)$

& wie für U im Bew. von S. 4.5
- $\lim\limits_{r\to 0} \partial_r G(x,r) = 0$
- $\lim\limits_{r\to 0} \partial_r^2 G(x,r) = \frac{1}{n}\Delta g(x)$

$\Big\} \Rightarrow \partial_r^2 \tilde{G}(x,0) = 0$

Also $\tilde{U}(x,\cdot,\cdot)$ erfüllt das ein-dimen. Halbraum-Problem (9) mit $\tilde{G}(x,0) = \tilde{H}(x,0) = 0$, $\partial_r^2 \tilde{G}(x,0) = 0$

$$\overset{\text{S.4.4}}{\Longrightarrow} \tilde{U}(x,r,t) = \tfrac{1}{2}\left(\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)\right) + \tfrac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x,y)\,dy, \quad 0 \le r \le t$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0} \tfrac{1}{r}\tilde{U}(x,r,t) = \partial_t \tilde{G}(x,t) + \tilde{H}(x,t)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+tz)\,dS(z)\right)}_{=:u_1(x,t)} + \underbrace{\frac{t}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} h(y)\,dS(y)}_{=:u_2(x,t)}$$

$\left(\begin{array}{l} |S^2| = 4\pi \\ |\partial B_t(x)| = 4\pi t^2 \end{array}\right)$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+tz) + t(\nabla g)(x+tz)\cdot z\,dS(z) = \fint_{\partial B_t(x)} g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\,dS(y)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} t h(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\,dS(y)$$

(i), (iii):

offenbar $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$

- $\lim\limits_{t\to 0} u_2(x,t) = 0$, da $u_2(x,t) = t\, H(x,t)$
- $\lim\limits_{t\to 0} \fint_{\partial B_t(x)} |\nabla g(y)|\, \underbrace{|y-x|}_{=t}\, dS(y) = \lim\limits_{t\to 0} t \fint_{\partial B_t(x)} |\nabla g(y)|\, dS(y) = 0$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x)$$

(ii) z.z. $\partial_t^2 u_j = \Delta u_j$, $j = 1,2$

$u_2(x,t) = t\, H(x,t)$

$\partial_t u_2 = t\partial_t H + H$, $\partial_t^2 u_2 = 2\partial_t H + t\,\partial_t^2 H$

$\partial_t H(x,t) = \frac{t}{3} \fint_{B_t(x)} \Delta h(y)\, dy$ $\left((7) \text{ angewandt an } h \text{ und } B_t(x)\right)$

$\partial_t^2 H(x,t) \overset{(8)}{=} -\frac{2}{3} \fint_{B_t(x)} \Delta h(y)\, dy + \fint_{\partial B_t(x)} \Delta h(y)\, dS(y)$

$$\Rightarrow \partial_t^2 u_2 = t \fint_{\partial B_t(x)} \Delta h(y)\, dS(y)$$

$$\Delta u_2 = \frac{t}{4\pi t^2} \Delta_x \int_{\partial B_t(x)} h(y)\, dS(y) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \Delta h(x+tz)\, dS(z)$$

$$= t \fint_{\partial B_t(x)} \Delta h(y)\, dS(y)$$

$\Rightarrow \partial_t^2 u_2 = \Delta u_2$. Analog $\partial_t^2 u_1 = \Delta u_1$

(iv): $u_1(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\, dS(y)$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow} \partial_t u_1(x,t) = \frac{t}{3} \fint_{B_t(x)} \Delta_y \big(g(y) + \nabla g(y)\cdot (y-x)\big)\, dy \xrightarrow{(t\to 0)} 0$$

Wellengl. in $\mathbb{R}^2$ – Lösungsdarstellung

<u>Problem</u>: keine explizite Lsg der Darboux-Gl. für $n=2$.
(für $n=3$ führt die Transform $U \rightsquigarrow rU$ zum explizit lösbaren Problem (9))

<u>Trick</u>: künstliche Erweiterung auf $\mathbb{R}^3$ durch konstante Fortsetzung

Setze: $\bar{u}(x,t) = \bar{u}((x_1,x_2,x_3),t)) := u((x_1,x_2),t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$

Es gilt:

$$\partial_t^2 u = \Delta u \text{ in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \iff \partial_t^2 \bar{u} = \Delta \bar{u} \text{ in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$$

Setze auch: $\bar{g}(x) := g(x_1,x_2)$, $\bar{h}(x) := h(x_1,x_2)$, $x \in \mathbb{R}^3$

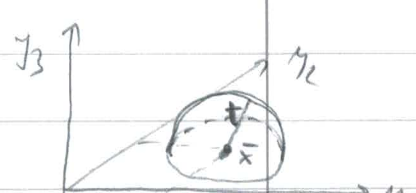
Also
$$\partial_t^2 \bar{u} = \Delta \bar{u} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$$
$$\bar{u} = \bar{g}, \; \partial_t \bar{u} = \bar{h} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\}$$

$$\overset{\text{Satz 4.7}}{\Longrightarrow} \quad \bar{u}(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t^{(3)}(x)} t\bar{h}(y) + \bar{g}(y) + \nabla\bar{g}(y)\cdot(y-x) \, dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$$

($B_t^{(3)}(x)$ = Ball in $\mathbb{R}^3$)

<u>Zurück ins $\mathbb{R}^2$</u>: für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $x' := (x_1,x_2)$, $\bar{x} := (x_1,x_2,0)$

$$u(x',t) \overset{\text{da } \bar{u} \text{ unabh. von } x_3}{=} \bar{u}(\bar{x},t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t^{(3)}(\bar{x})} \dots \, dS(y)$$



parametrisiere die obere Halbsphäre:
$$\varphi(y') := \left(y', \sqrt{t^2 - |y'-x'|^2}\right), \quad y' \in B_t^{(2)}(x') \quad (= \text{Kreisscheibe um } x')$$

(Erinnerung: Für $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, Σ Oberfläche in $\mathbb{R}^3$, $\Sigma = \varphi(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist
$$\int_\Sigma f(x)\,dS(x) = \int_\Omega f(\varphi(y)) \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}(y) \right| dy \;)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y') = \left(1, 0, \frac{x_1-y_1}{\sqrt{t^2-|y'-x'|^2}}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}(y') = \left(0, 1, \frac{x_2-y_2}{\sqrt{}}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y') \times \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}(y') = \left(\frac{y_1-x_1}{\sqrt{\quad}}, \frac{y_2-x_2}{\sqrt{\quad}}, 1\right)$$

$$\left|\qquad\qquad\qquad\right| = \left(\frac{|x'-y'|^2}{t^2-|y'-x'|^2}+1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2-|y'-x'|^2}}$$

$$\Rightarrow u(x',t) = \frac{\overset{\swarrow \text{2 Halbkugeln}}{2}}{4\pi t}\int_{B_t^{(2)}(x')} \frac{t h(y') + g(y') + \nabla g(y')\cdot(y'-x')}{\sqrt{t^2-|y'-x'|^2}}\, dy' \quad , x'\in\mathbb{R}^2, t>0$$

weil $\nabla \bar{g}(y) = \begin{pmatrix}\nabla g(y') \\ 0\end{pmatrix}$.

Also:

Satz 4.8 (Wellengl.-Lsg in $\mathbb{R}^2$)

Sei $g\in C^3(\mathbb{R}^2)$, $h\in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

(11) $$u(x,t) := \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{t h(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy \quad , x\in\mathbb{R}^2, t>0.$$

(Poisson-Formel)

Dann
(i) $u\in C^{2,2}(\mathbb{R}^2\times(0,\infty))$
(ii) $\partial_t^2 u = \Delta u$ in $\mathbb{R}^2\times(0,\infty)$
(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} \partial_t u(x,t) = h(x_0)$ $\forall\, x_0\in\mathbb{R}^2$
(iv) Jede $C^{2,2}$-Lsg auf $\mathbb{R}^2$ hat die Form (11).

Bew: $u(x,t) = \bar{u}((x_1,x_2,0),t) \overset{\bar{u} \text{ unabh. von } x_3}{=} \bar{u}((x_1,x_2,x_3),t)\ \forall x\in\mathbb{R}^3 \overset{\text{obige Rechnung}}{=} (10) \Rightarrow \bar{u}$ erfüllt Wellengl mit Daten $\bar{g}, \bar{h}$

$\overset{S.4.7}{\Longrightarrow}$ (i)–(iii) gilt

(IV): folgt aus Satz 4.7. ∎

Abhängigkeitsbereich, Einflussbereich, Ausbreitungsgeschwindigkeit ($\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$)

Betrachte die Wellengl. in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

1) <u>Abhängigkeitsbereich</u> des Punktes $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$:

$A(x_0,t_0)$ = kleinste Menge in $\mathbb{R}^n$, woher die Werte der Anfangsdaten den Lösungswert $u(x_0,t_0)$ bestimmen.

2) <u>Einflussbereich</u> vom Punkt $y_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$E(y_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : y_0 \in A(x,t)\}$$

Lösungen in $\mathbb{R}^n$:

$n=1$: $\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy \qquad$ (d'Alembert)

$n=2$: $\quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x) + t h(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy \qquad$ (Poisson)

$n=3$: $\quad u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x) + t h(y)\,dS(y) \qquad$ (Kirchhoff)

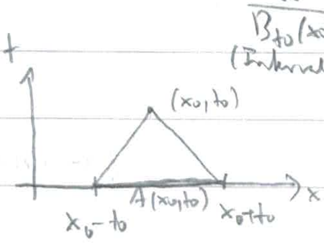
offenbar:

n	1	2	3
$A(x_0,t_0)$	$[x_0-t_0, x_0+t_0] = \overline{B_{t_0}(x_0)}$ (Intervall)	$\overline{B_{t_0}(x_0)}$ (Kreisscheibe)	$\partial B_{t_0}(x_0)$ (Sphäre)

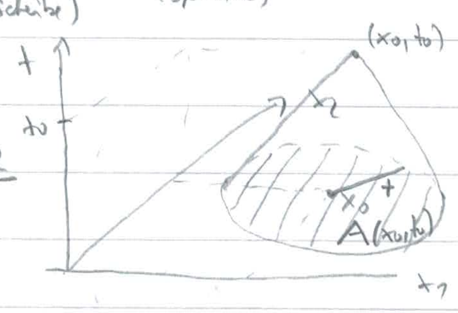
<u>1) Abh.-Bereich</u>

graphisch:

<u>n=1</u>:



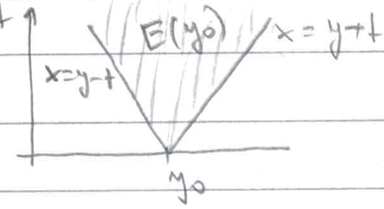
<u>n=2</u>



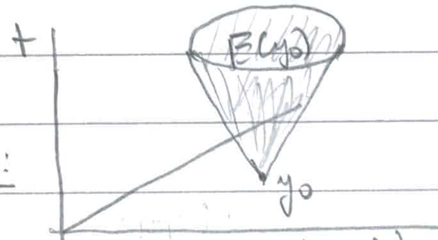
<u>n=3</u>

2) Einflussbereich:

$n=1$:

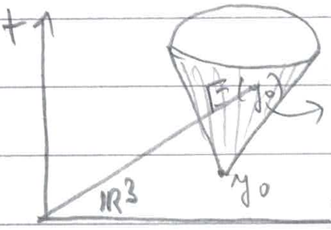


$n=2$:



(ganze Kegel)

$n=3$:

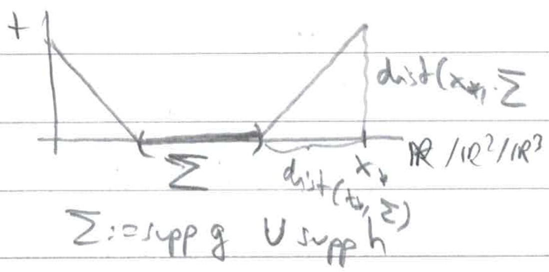


→ nur die Oberfläche!

n	1	2	3
$E(y_0)$	$\{(x,t): t>0, \lvert x-y_0\rvert \leq t\}$		$\{(x,t): t>0, \lvert x-y_0\rvert = t\}$

3) Ausbreitungsgeschwindigkeit

$= 1$ für alle $n \in \{1,2,3\}$ (Einflussbereich wächst mit Geschw. 1)
vgl. Wärmeleitungsgl.

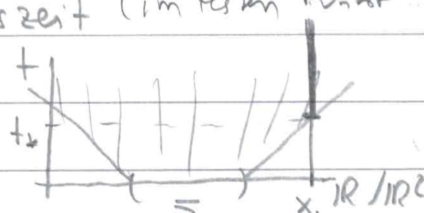


$\Sigma := \operatorname{supp} g \cup \operatorname{supp} h$

Beobachter in x_* sieht die Welle erst nach Zeit $t_* = 1 \cdot \operatorname{dist}(\Sigma, x_*)$

4) Signal-Lebenszeit (im festen Punkt $x_* \in \mathbb{R}^n$)

$n = 1,2$

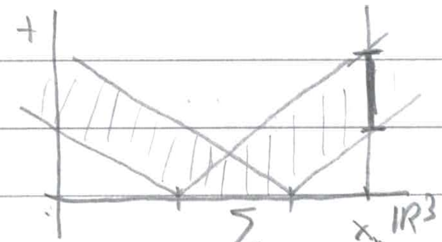


Beobachter sieht die Lsg für alle $t \geq t_*$

(genauer: $\forall t \geq t_* \; \exists g,h$ mit $\operatorname{supp}(g,h) \subset \Sigma$, s.d. $u(x_*,t) \neq 0$)

↳ unendliche Lebenszeit!

$n=3$:



(Lebenszeit in x_*) $\subseteq$
$[\operatorname{dist}(x_*, \Sigma), \operatorname{dist}(x_*, \Sigma) + \operatorname{diam} \Sigma]$

↳ endliche Lebenszeit!

Bem: Wellengleichung in $\mathbb{R}^n$, $n>3$

a) ungerade n $(n=2k+1)$:

$\tilde{U}(x,r,t) := \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\,U(x,r,t)\right)$ erfüllt das Halbraum-Problem (9)

b) gerade n $(n=2k)$

- konstante Fortsetzung auf $\mathbb{R}^{n+1}$

d) Inhomogene Wellengleichung

Betrachte

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) &&, (x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \\ &u(x,0)=0,\quad \partial_t u(x,0)=0 &&, x\in\mathbb{R}^n \end{aligned}\right\}(12)$$

Bem: Für inhomogene Anfangsdaten $u(x,0)=g(x)$, $\partial_t u(x,0)=h(x)$ zerlege das Problem in

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times[0,\infty) \\ u_1 = g,\ \partial_t u_1 = h & \text{in } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \Delta u_2 = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times[0,\infty) \\ u_2 = 0,\ \partial_t u_2 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

Idee für (12): Variation der Konstanten

Erinnerung (ODE 2. Ordnung)

$$(13)\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u - a u = f &, t\in\mathbb{R} \\ u(0)=0,\ \frac{d}{dt}u(0)=0 \end{cases}$$

mit $a\in\mathbb{R}$, $u,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Als System 1. Ordnung ist (13)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad , \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogene Lsg: $\begin{pmatrix} u_h \\ v_h \end{pmatrix}(t) = e^{tA}c$, $c\in\mathbb{R}^2$

partikul. Lsg: $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}(t) = e^{tA}d(t)$ mit $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ zu bestimmen (Var. der Konst.)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_p\\v_p\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_p\\v_p\end{pmatrix} + e^{tA}d'(t) \overset{!}{=} A\begin{pmatrix}u_p\\v_p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(t) = \int_0^t e^{-\tilde{\tau}A}\begin{pmatrix}0\\f(\tau)\end{pmatrix}d\tilde{\tau} \Rightarrow \begin{pmatrix}u_p\\v_p\end{pmatrix}(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A}\begin{pmatrix}0\\f(\tau)\end{pmatrix}d\tau.$$

Jetzt definiere den Integranden als $\begin{pmatrix}\tilde{u}(s;\tau)\\\tilde{v}(s;\tau)\end{pmatrix} := e^{sA}\begin{pmatrix}0\\f(\tau)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\tilde{u}(\cdot;\tau)\\\tilde{v}(\cdot;\tau)\end{pmatrix}$ ist für jedes $\tau \geq 0$ die eindeutige Lsg von

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\\tilde{v}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\tilde{u}\\\tilde{v}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\tilde{u}\\\tilde{v}\end{pmatrix}(0;\tau) = \begin{pmatrix}0\\f(\tau)\end{pmatrix}\end{cases}$$

d.h. $\begin{cases}\frac{d^2}{ds^2}\tilde{u}(\cdot;\tau) = A\,\tilde{u}(\cdot;\tau)\\ \tilde{u}(0;\tau) = 0,\ \frac{d}{ds}\tilde{u}(\cdot;\tau) = f(\tau)\end{cases}$

Analogie für die Wellengl.:

Für $f: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $\tau \geq 0$ sei $\tilde{u}(x,s;\tau)$ die Lsg von

$$(14)\quad \begin{cases}\partial_s^2\tilde{u} = \Delta\tilde{u} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\\ \tilde{u}(x,0;\tau) = 0,\ \partial_s\tilde{u}(x,0;\tau) = f(x,\tau) & \forall x \in \mathbb{R}^n\end{cases}$$

Satz 4.9: Sei $f \in C^{k,0}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ mit $k = \begin{cases}1, & n=1\\2, & n=2,3\end{cases}$, dann ist $u(x,t) := \int_0^t \tilde{u}(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$, $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$

mit $\tilde{u}(\cdot,\cdot;\tau)$ der Lsg von (14) aus Satz 4.3 / 4.7. / 4.8 (für $n=1/2/3$) die eindeutige $C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$-Lsg von (12).

Bew.: • $\tilde{u}(\cdot,\cdot;\tau) \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ nach Satz 4.3 / 4.7 / 4.8 (mit $\tilde{u}$ explizit gegeben)

• $\tilde{u}$ und die partiellen Ableitungen bzgl x, t sind stetig in τ – folgt aus Formeln für $\tilde{u}$ (τ ist Parameter)

1) AB: $u(x,0) = \int_0^0 \dots = 0$

$$\partial_t u(x,t) = \underbrace{\tilde{u}(x,0;t)}_{\overset{(14)}{=} 0 \ \forall t \geq 0} + \int_0^t \partial_s \tilde{u}(x,t-\tau;\tau)\, d\tau \xrightarrow{t \to 0} 0$$

2) Gleichung: $$\partial_t^2 u(x,t) = \underbrace{\partial_t \tilde{u}(x,0;t)}_{=0, \text{ da } \tilde{u}(x,0;\tau) = \text{konst}} + \int_0^t \partial_t^2 \tilde{u}(x,t-\tau;\tau)\, d\tau + \underbrace{\partial_s \tilde{u}(x,0;t)}_{\overset{(14)}{=} f(x,t)}$$

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \underbrace{\Delta \tilde{u}(x,t-\tau;\tau)}_{\overset{(14)}{=} \partial_t^2 \tilde{u}(\ )}\, d\tau$$

$\Rightarrow \partial_t^2 u - \Delta u = f$ ▪

Explizite Lsngen von (12) für $n = 1,2,3$:

$n=1$: $$\tilde{u}(x,s;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-s}^{x+s} f(y,\tau)\, dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y,\tau)\, dy\, d\tau \overset{(\tau = t-s)}{=} \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y,t-s)\, dy\, ds$$

$n=2$: $$\tilde{u}(x,s;\tau) = \frac{1}{2\pi s}\int_{B_s(x)} \frac{s\, f(y,\tau)}{\sqrt{s^2 - |y-x|^2}}\, dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{B_{t-\tau}(x)} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |y-x|^2}}\, dy\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{B_s(x)} \frac{f(y,t-s)}{\sqrt{s^2 - |y-x|^2}}\, dy\, ds$$

$n=3$: $$\tilde{u}(x,s;\tau) = \frac{1}{4\pi s^2}\int_{\partial B_s(x)} s\, f(y,\tau)\, dS(y)$$

$$\Rightarrow u(x,t;\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial B_s(x)} \frac{f(y,t-s)}{s}\, dS(y)\, ds$$

e) Energiemethode: - Eindeutigkeit für das ARWP
- Ausbreitungsgeschwind. in $\mathbb{R}^n$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. und offen mit $\partial\Omega$ Lipschitz. Betrachte das ARWP

$$(15) \begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ \text{(AB)} \quad u(x,0) = g(x),\ \partial_t u(x,0) = h(x), & x \in \Omega \\ \text{(RB)} \quad u(x,t) = r(x,t) & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

(Eindeutigkeit für (15))

Satz 4.10 Es gibt höchstens eine $C^2(\bar{\Omega}\times[0,T])$-Lsg von (15).

Bew: Seien u_1, u_2 zwei Lsgen.

$v := u_1 - u_2$ erfüllt (15) mit $g = h = 0$, $f = r = 0$.

Sei $e(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t v(x,t))^2 + |\nabla v(x,t)|^2 \, dx$

$$e'(t) = \int_\Omega \partial_t v \underbrace{\partial_t^2 v}_{=\Delta v} + \nabla v \cdot \nabla \partial_t v \, dx$$

$$\underset{\substack{\text{P.I. auf}\\ \text{2. Term}}}{=} \int_\Omega \partial_t v \Delta v - \Delta v \partial_t v \, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot \nu \, \underbrace{\partial_t v}_{\overset{(RB)}{=} 0 \;\; \forall t \in [0,T]} \, dS(x)$$

$$= 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

$\Rightarrow e(t) = e(0) = 0 \quad \Rightarrow \partial_t v(x,t) = 0, \; \nabla v(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T]$

Also v konstant auf $\Omega \times [0,T]$ $\Rightarrow v(x,t) = v(x,0) = 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T]$ ∎

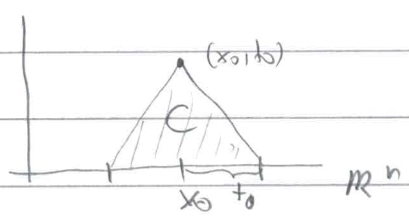
Satz 4.11 (endliche Ausbreitungsgeschw. in $\mathbb{R}^n$)

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lsg von $\partial_t^2 u = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

mit $\partial_t u = u = 0$ in $B_{t_0}(x_0) \times \{0\}$.

Dann ist

$$u = 0 \text{ in } C := \{(x,t) : 0 \le t \le t_0, \; |x - x_0| \le t_0 - t\}.$$



Bew: $e(t) := \frac{1}{2}\int_{B(x_0, t_0 - t)} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 dx$, $\quad 0 \le t \le t_0$

$$e'(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}\int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \, dS(x)}_{= \text{Ableitung des Zwiebelintegrals bzgl. } t \text{ in: } \int_0^{t_0 - t} \dots} + \int_{B_{t_0-t}(x_0)} (\partial_t u \underbrace{\partial_t^2 u}_{=\Delta u} + \nabla u \cdot \nabla \partial_t u) \, dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{\underset{\text{von } \int_B \partial_t u \Delta u}{=}} -\frac{1}{2} \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 \, dS(x) + \int_{\partial B_{t_0-t}(x)} \underbrace{\partial_t u \, \nabla u \cdot \nu}_{|\cdot| \overset{C-S}{\leq} |\partial_t u \nu| |\nabla u| \leq \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2)} \, dS(x)$$

$$\leq 0.$$

- $e(0)=0$, $e'(t) \leq 0$, $e(t) \geq 0 \Rightarrow e(t)=0 \quad \forall t \in [0, t_0]$

d.h. $\nabla_{(x,t)} u = 0$ in $C \Rightarrow u$ konstant in $C \Rightarrow u|_C = u|_{B_{t_0}(x_0) \times \{0\}} = 0$ ∎

f) Eigenfunktion-Entwicklung-Verfahren für die Wellengl.

- Betrachte (15) mit $r = r(x)$ (d.h. r unabh. von t)

↳ das Verfahren ist analog zur Wärmeleitungsgl. (Kap. 3.6)

- gleiches E-W-Problem: $-\Delta w_k = \lambda_k w_k$ in Ω, $w_k = r$ auf $\partial\Omega$
- $u(\cdot,t)$, $f(\cdot,t)$, g und h werden in $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ entwickelt
  - ↳ Koeffizienten $u_k(t)$, $f_k(t)$, g_k, h_k, $k \in \mathbb{N}$
- Bestimmen von u_k:

$$u_k'' + \lambda_k u_k = f_k$$

als System 1. Ordnung: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_k & 0 \end{pmatrix}}_{=: A_k} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_k \end{pmatrix}, \quad t > 0$

wobei $v_k := \frac{d}{dt} u_k$.

& $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} g_k \\ h_k \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}(t) = e^{tA_k}\begin{pmatrix} g_k \\ h_k \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A_k}\begin{pmatrix} 0 \\ f_k(s) \end{pmatrix} ds$$

<u>Berechnung von e^{tA_k} für $\Omega = (0,\pi)^n$ und homogene Neumann oder Dirichlet RB:</u>

- $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$
- Eigenwerte von A_k: $\mu = \pm\sqrt{-\lambda_k} = \pm ik$
- E-Vektoren von A_k: $\begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -ik \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{tA_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ikt} & \\ & e^{-ikt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ik & -1 \\ -ik & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{-1}{2ik}\right) =$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} \cos(kt) & \frac{1}{k}\sin(kt) \\ -k\sin(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_k(t) = \cos(kt)\, g_k + \frac{1}{k}\sin(kt)\, h_k + \int_0^t \frac{1}{k} \sin(k(t-s))\, f_k(s)\, ds$$

Bsp: Übung.

5. Skalare Erhaltungsgleichungen in einer Dimension

Betrachte die Bilanzgleichung für die Erhaltung von Masse / Energie / Impuls / .... ohne Zufuhr ($f = 0$ in § 1.1):

$$\frac{d}{dt} \int_V u(x,t)\, dx = - \int_{\partial V} j(x,t) \cdot \nu(x)\, dS(x) \qquad \forall \text{ Testvolumen } V$$

wobei j = Fluss pro Fläche & Zeit $\quad (j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$

Annahme: $j = f(u)$.

Nach dem Satz von Gauß: $\frac{d}{dt} \int_V u(x,t)\, dx = - \int_V \nabla \cdot f(u)\, (x,t)\, dx \quad \forall V$

$$\Rightarrow \qquad \partial_t u(x,t) + \nabla \cdot (f(u))\,(x,t) = 0 \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n$$

wir Betrachten $n = 1$:

$$(1) \qquad \partial_t u(x,t) + \partial_x (f(u))(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T).$$

allgemeine Annahme: f glatt (mindestens $f \in C^1$)

5.1 Methode der Charakteristiken $(n=1)$

<u>Idee:</u> Suche einen Weg $\gamma : (0,T) \to \mathbb{R}$, sodass $\gamma'(t) = f'(u(\gamma(t),t))$.

Dann
$$\frac{d}{dt}\big(u(\gamma(t),t)\big) = \partial_x u(\gamma(t),t)\,\gamma'(t) + \partial_t u(\gamma(t),t)$$
$$= \underbrace{\partial_x u(\gamma(t),t)\, f'(u(\gamma(t),t))}_{=\partial_x (f(u))(\gamma(t),t)} + \partial_t u(\gamma(t),t) \overset{(1)}{=} 0$$

d.h. u ist <u>konstant entlang der Kurve $(\gamma(t),t)$</u> !!

<u>Def.:</u> Für $y \in \mathbb{R}$ heißt die Lsg $\gamma_y : [0,T] \to \mathbb{R}$ von
$$\frac{d}{dt}\gamma_y(t) = f'(\underline{\underline{u_0}}(y))$$
$$\gamma_y(0) = y$$
eine <u>Charakteristik</u> der Gl. (1).

<u>Bem:</u> Explizit ist $\gamma_y(t) = y + t\, f'(u_0(y))$

<u>Lemma 1</u> Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ sind diffbare Lsngen von (1) konstant entlang aller Charakteristiken γ.

<u>Bew:</u> Sei $u_0 := u(\cdot, 0)$
$$\frac{d}{dt}\big(u(\gamma(t),t)\big) = \partial_x u(\gamma(t),t)\, f'(u_0(y)) + \partial_t u(\gamma(t),t)$$
$$\overset{(1)}{=} \big[f'(u_0(y)) - f'(u(\gamma(t),t))\big]\,\underbrace{\partial_x u(\gamma(t),t)}_{=:g(t)}$$

Für $v(t) := u(\gamma(t),t)$ gilt also
$$\left.\begin{aligned} v'(t) &= \big[f'(u_0(y)) - f'(v)\big]\, g(t) \\ v(0) &= u_0(y) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Ein Lsg von $(*)$: $v(t) \equiv u_0(y)$.

Rechte Seite der ODE in $(*)$ ist Lip-stetig in v (da $f \in C^2$) und stetig int.

$\Rightarrow$ Lsg von $(*)$ eindeutig

Also $u(\gamma(t),t) = u_0(y) \quad \forall t \in [0,T]$ ∎

Erinnerung: $C_b^k(\mathbb{R}) = \{u \in C^k(\mathbb{R}) : u^{(j)}$ beschränkt auf $\mathbb{R}$ $\forall j \leq k\}$

Satz 2 (Konstruktion von lokalen klassischen Lsgen zu (1) durch Charakteristiken)

Sei $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ und $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R})$. Dann gibt es ein $T > 0$, s.d.

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R} \times (0,T) \\ (y,t) \mapsto (\gamma_y(t), t) \end{cases}$$

diffbar und bijektiv ist.

Außerdem liefert $u(x,t) := u_0(y)$ mit $\gamma_y(t) = x$ eine eindeutige Lsg von (1) in $\mathbb{R} \times (0,T)$.

Bew: 1) z.z. Γ diffbar & bijektiv

$$\Gamma(y,t) = (y_0 + t f'(u_0(y)), t)$$

$$f \in C^2, u_0 \in C^1 \Rightarrow D\Gamma(y,t) = \begin{pmatrix} 1 + t f''(u_0(y)) u_0'(y) & f'(u_0(y)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f'', u_0' beschränkt $\Rightarrow \det D\Gamma(y,t) = 1 + t f''(u_0(y)) u_0'(y) > 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall t \in [0,T)$

mit $T > 0$ so klein, dass $(f''(u_0) u_0')_- < \frac{1}{T}$

($(g(x))_- := \max\{0, -g(x)\}$ ist der negativer Teil von g.)

2) z.z. $u(x,t) = u_0(y)$ ist die eindeutige Lsg

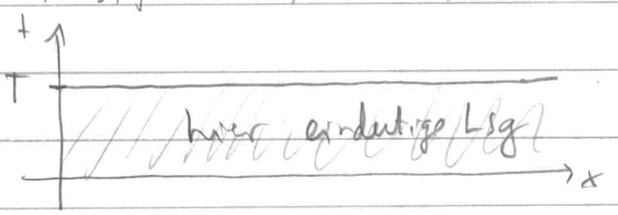
$$u(\gamma_y(t), t) = u_0(y)$$

$$\Rightarrow 0 = \partial_x u(\gamma_y(t),t)\gamma_y'(t) + \partial_t u(\gamma_y(t),t)$$

$$= f'(u_0(y)) \partial_x u(\gamma_y(t),t) + \partial_t u(\gamma_y(t),t)$$

$$= f'(u(x,t)) \partial_x u(x,t) + \partial_t u(x,t), \text{ wobei } (x,t) = \Gamma(y,t)$$

& jeder Punkt $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$ liegt auf genau einer Charakteristik, weil Γ bijektiv auf $\mathbb{R} \times (0,T)$. D.h. $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$ $\exists! y$ mit $\Gamma(y,t) = (x,t)$

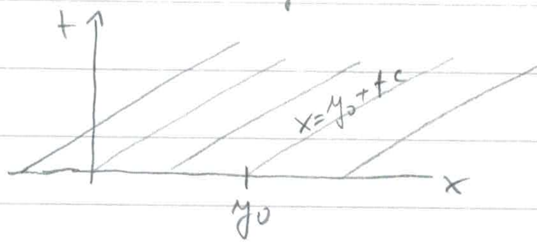


Bsp 1) Transportgl. : $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$

$u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$

mit $c \in \mathbb{R}$.

↳ d.h. (1) mit $f(u) = cu$



$\gamma_y(t) = y + tc$

(alle Charakt. parallele Geraden)

2) Burgers-Gl. : $\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$ in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$

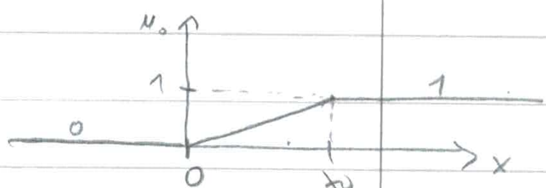
$u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$

↳ d.h. $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ (Transport mit Geschwindigkeit u)

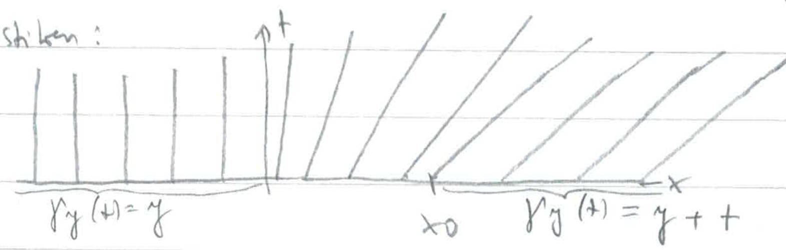
$\Rightarrow \gamma_y(t) = y + t\,u_0(y)$

a) wachsendes u_0

z.B. $u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{x_0}, & x \in (0, x_0) \\ 1, & x \ge x_0 \end{cases}$



Charakteristiken:

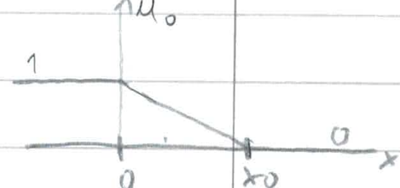


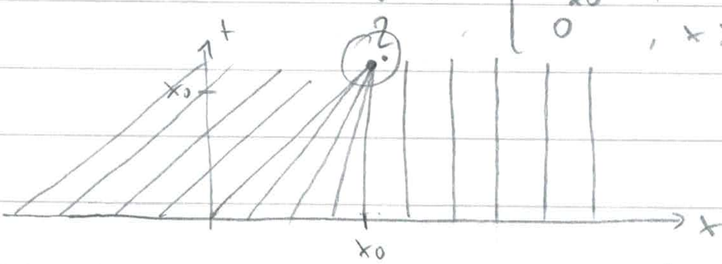
Jeder Raum-Zeit-Punkt liegt auf genau einer Charakteristik.

↳ globale klassische Lsg (bis auf die Linien $(x,t) = (0,t)$ und $(x,t) = (x_0 + t, t)$, $t \ge 0$ wo nur stetig)

b) fallendes u_0

z.B. $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 1 - \frac{x}{x_0}, & x \in (0, x_0) \\ 0, & x \ge x_0 \end{cases}$

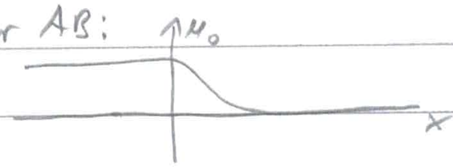




Charakteristiken treffen sich für $t \ge x_0$!!!

$\Rightarrow$ es entsteht ein „Schock" (Unstetigkeit der Lsg)

Bem: passiert auch bei glatter AB:



Frage: Wie definiert man eine Lsg für $t \geq t_0$?

5.2 Verallgemeinerte Lösungsbegriffe

a) integrale Lsg

Betrachte die Bilanzgl. für $n=1$ (mit $j = f(u)$), d.h.

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b u(x,t)\,dx = -\left[f(u(b,t)) - f(u(a,t))\right] \quad , a,b \in \mathbb{R},\ t>0$$

(2) macht Sinn auch ohne Stetigkeit bzgl x

Def: $u: \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R}$ heißt eine integrale Lsg von (1), falls für fast alle $t \in (0,T)$ und fast alle $a,b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$ Gleichung (2) gilt.

b) Schwache Lsg (die Standardwahl)

Motivation: Sei u eine C^1-Lsg von (1) mit $u(x,0) = u_0(x)$ und teste (1) mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,t) \left[\partial_t u(x,t) + \partial_x \big(f(u(x,t))\big)\right] dx\,dt$$

Part. Int. $\Rightarrow$

$$(3) \quad 0 = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0)\, u_0(x)\,dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \partial_t \varphi(x,t)\, u(x,t) + f(u(x,t))\, \partial_x \varphi(x,t)\,dx\,dt$$

Def: Sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Die Fkt. $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ heißt schwache Lsg von (1) mit $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, falls (3) für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gilt.

Bem: Wir arbeiten mit schwachen Lsgen

5.3 Rankine - Hugoniot - Bedingung (RHB)

- bestimmt wie sich ein Schock verhält

Betrachte eine schwache Lsg mit Unstetigkeit entlang einer Kurve $x = \gamma(t)$ (Schock-kurve)

(4) $$u(x,t) = \begin{cases} u_l(x,t) & , x < \gamma(t) \\ u_r(x,t) & , x > \gamma(t) \end{cases}$$

wobei u_l, u_r klass. C^1-Lsgen auf $\Omega_{r,l} := \{(x,t) : t > 0, x \gtrless \gamma(t)\}$ und $u_{l,r} \in C(\overline{\Omega}_{r,l})$.

Aus (3) folgt mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \underline{(0,\infty)})$

$$0 = \underbrace{\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \varphi_t u_l + \varphi_x f(u_l)\, dx\, dt}_{=: I_l} + \underbrace{\int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty \varphi_t u_r + \varphi_x f(u_r)\, dx\, dt}_{=: I_r}$$

$$I_l = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\gamma(t)} \varphi u_l\, dx \right) - \gamma'(t) \varphi(\gamma(t),t)\, u_l(\gamma(t),t) - \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \varphi \underbrace{\partial_t u_l}_{= -\partial_x (f(u_l))} dx \right] dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \varphi_x f(u_l)\, dx\, dt$$

$$\overset{\text{P.I. in } x \text{ auf } \int_{-\infty}^{\gamma} \varphi \partial_x (f(u_l)) dx}{=} - \int_0^\infty \gamma'(t) \varphi(\gamma(t),t)\, u_l(\gamma(t),t)\, dt + \int_0^\infty \varphi(\gamma(t),t)\, f(u_l(\gamma(t),t))\, dt$$

Analog: $$I_r = \int_0^\infty \gamma'(t) \varphi(\gamma(t),t)\, u_r(\gamma(t),t)\, dt - \int_0^\infty \varphi(\gamma(t),t)\, f(u_r(\gamma(t),t))\, dt$$

Also $$0 = I_l + I_r = \int_0^\infty \Big\{ \gamma'(t) \big(u_r(\gamma(t),t) - u_l(\gamma(t),t) \big) - \big(f(u_r(\gamma(t),t)) - f(u_l(\gamma(t),t)) \big) \Big\} \varphi(\gamma(t),t)\, dt$$
$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$$

$\Rightarrow \{\dots\} = 0$, d.h.

$$\boxed{\gamma'(t) = \frac{[f](t)}{[u](t)} \quad \forall t > 0}$$

wobei $[f](t) = f(u_r(\gamma(t),t)) - f(u_l(\gamma(t),t))$ (= Sprung von $f(u)$)

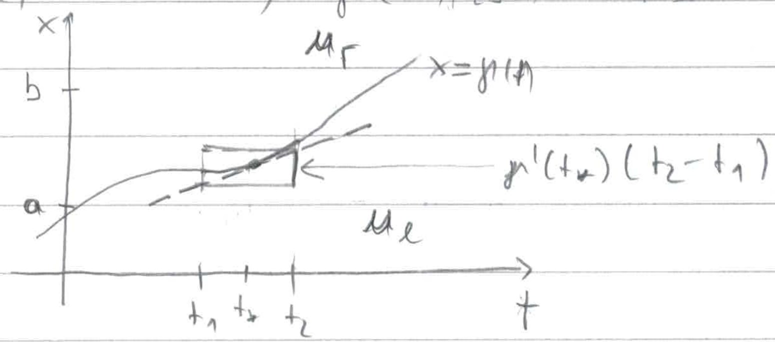
$[u](t) = u_r(\gamma(t),t) - u_l(\gamma(t),t)$ (= Sprung von u)

Also es gilt:

<u>Satz 3</u>: Sei u gegeben durch (4) mit $u_{l,r} \in C(\overline{\Omega_{l,r}})$, wobei
$\Omega_{r,l} := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) : x \gtrless \gamma(t)\}$ und $\gamma \in C^1((t_0,\infty))$.
Dann ist u eine schwache Lsg von (1) genau dann wenn $u_{l,r}$ klass. Lsgen auf $\Omega_{r,l}$ sind und
$$\gamma'(t) = \frac{[f](t)}{[u](t)}, \quad t > t_0. \qquad (5)$$

<u>Bem</u>: physikalische Erklärung von RHB durch Massenerhaltung
Betrachte stückweise konstante Lsg
$$u = \begin{cases} u_l, & x < \gamma(t) \\ u_r, & x > \gamma(t) \end{cases}, \quad u_{l,r} \in \mathbb{R}$$

Sei $t_1 < t_2$, $t_2 - t_1$ klein, $\gamma([t_1,t_2]) \subset [a,b]$

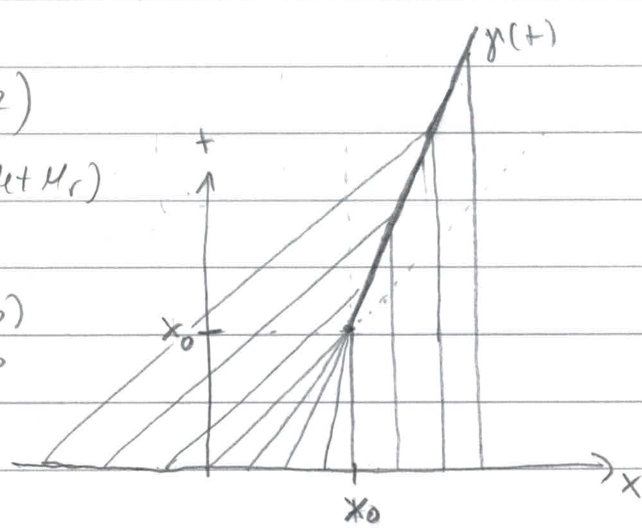


Massenänderung in $[a,b]$ während $[t_1,t_2]$:
$$\Delta m \approx (u_l - u_r)\,\gamma'(t_*)\,(t_2 - t_1) \qquad \left(\text{z.B. } t_* = \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$
und wegen Massenerhaltung
$$\Delta m \approx \left(f(u_l) - f(u_r)\right)(t_2 - t_1)$$
Mit $t_2 \to t_1$ erhalte (5).

<u>Bsp</u>: Burgers-Gl. $\left(f(u) = \frac{1}{2}u^2\right)$
$$\gamma'(t) = \frac{\frac{1}{2}[u^2]}{[u]} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Sei $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 1 - \frac{x}{x_0}, & x \in (0, x_0) \\ 0, & x \ge x_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma'(t) = \frac{1}{2}, \quad t > x_0$



↳ • für $t < x_0$ gilt Satz 2 (mit $T = x_0$)
• für $t > x_0$ gilt Satz 3 (mit $t_0 = x_0$)

5.4 Nicht-Eindeutigkeit von schwachen Lsgen

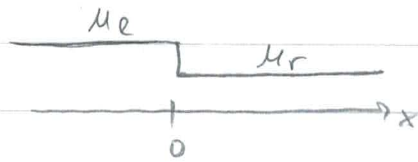
Betrachte das s.g. Riemann-Problem

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \begin{cases} u_e, & x \leq 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

mit $u_e, u_r \in \mathbb{R}$, $u_e \neq u_r$

Bsp. Burgers-Gl. $\left(f(u) = \frac{1}{2}u^2\right)$

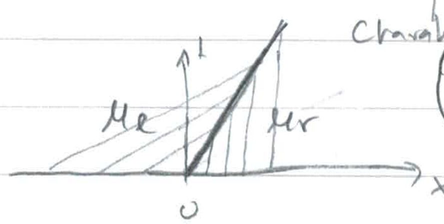
a) $u_e > u_r$



⟹

Charakteristiken (schneiden sich sofort)

(i) Lsg mit einem Schock

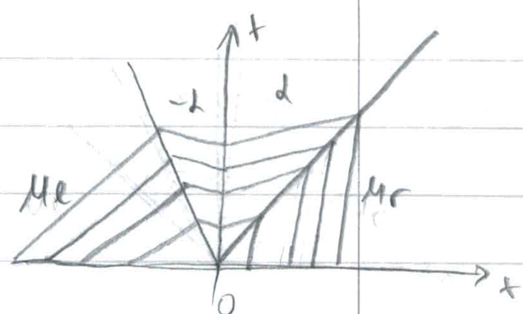


RHB: $\gamma'(t) = \frac{1}{2}(u_e + u_r)$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_e, & x < \frac{1}{2}(u_e + u_r)t \\ u_r, & x > \frac{1}{2}(u_e + u_r)t \end{cases}$$

(ii) Lsg mit 3 Schocks

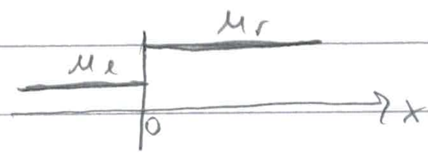
$$u(x,t) = \begin{cases} u_e, & x < \lambda_1 t \\ -\alpha, & \lambda_1 t < x < 0 \\ \alpha, & 0 < x < \lambda_2 t \\ u_r, & \lambda_2 t < x \end{cases}$$



RHB: $\lambda_1 = \frac{u_e - \alpha}{2}$, $\lambda_2 = \frac{u_r + \alpha}{2}$

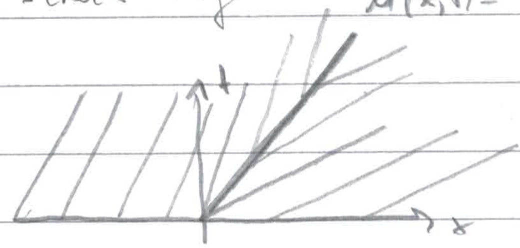
• wähle $\alpha > u_e$

b) $u_\ell < u_r$



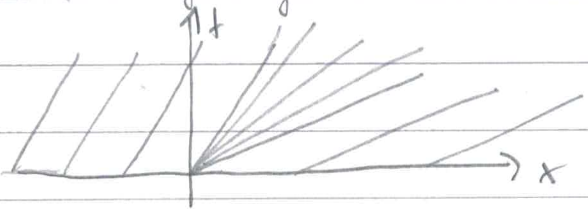
(i) Schock-Lsg

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell, & x < \frac{1}{2}(u_\ell + u_r)\,t \\ u_r, & x > \text{—}\,\text{''}\,\text{—} \end{cases}$$



(ii) Verdünnungswelle (VDW) /rarefaction fan/

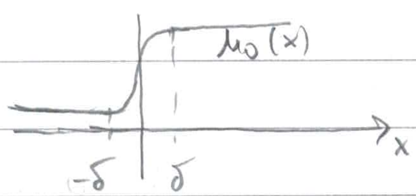
↳ eine stetige Lsg



Im „Fächer" setzen wir $u(x,t) = \frac{x}{t}$

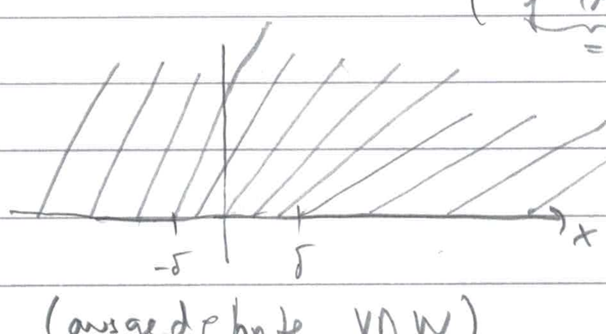
d.h. $$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell, & x < u_\ell t \\ \frac{x}{t}, & u_\ell t < x < u_r t \\ u_r, & x > u_r t \end{cases} \qquad \left(\partial_t\left(\tfrac{x}{t}\right) + \tfrac{x}{t}\,\partial_x\left(\tfrac{x}{t}\right) = 0\right)$$

Bem: VDW ist die physikalische Lsg, weil bei geglättetem u_0 eine VDW die eindeutige Lsg ist:



Charakteristiken generieren jetzt eine C^1-Lsg auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, da $T = \infty$ im Satz 2 möglich.

$$\Big(\underbrace{f''(u_0)}_{=1}\, u_0' > 0 \Big)$$



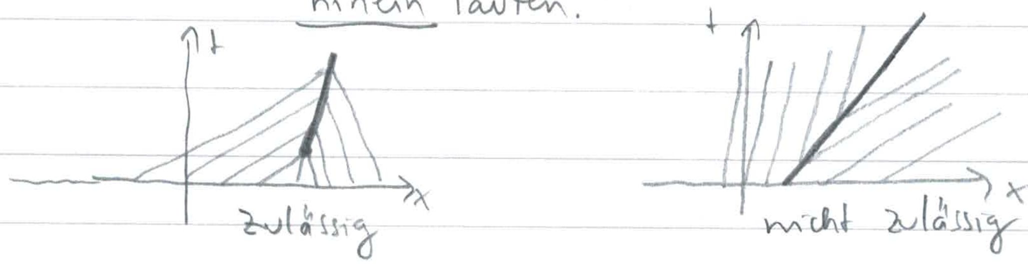
(ausgedehnte VDW)

Bem: Also RHB reicht nicht um Eindeutigkeit zu sichern.

5.5 Schockbedingungen, Entropie und Eindeutigkeit

Ziel: Bedingung an die Lsg (bzw Schock) s.d. die Lsg eindeutig ist

Idee von Lax: Schock ist zulässig, falls Charakteristiken in den Schock hinein laufen.



Genauer fördern wir:

Def: Lax-Schock-Ungleichungen (LSU)

Für eine Schock-Lsg mit dem Sprung $[u] = u_r - u_l$ heißen

$$f'(u_l) > \lambda > f'(u_r) \quad , \text{wobei } \lambda = \frac{[f]}{[u]}$$

die LSU.

Def: (zulässige Schock-Lsg)

$u : \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R}$ heißt eine zulässige Schock-Lsg, falls

1) u bis auf endlich vielen diffbaren Sprunglinien $\gamma_k : (0,T) \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, K \in \mathbb{N}_0$ eine klassische C^1-Lsg ist,
2) die Sprunglinien erfüllen RHB: $\gamma_k'(t) = \frac{[f(t)]_k}{[u(t)]_k}$, $k = 1, \dots, K$,
3) u erfüllt an allen Sprungstellen LSU.

Satz 4 (Kružkov L^1-Kontraktion)

Seien u, v zwei zulässige Lsgen von (1) und f sei konvex. Dann gilt die L^1-Kontraktionseigenschaft:

$$(0,T) \ni t \longmapsto \|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \text{ ist monoton fallend.}$$

Korollar 5 In der Klasse der zulässigen Lsgen ist die Lsg des Cauchy-Problems zu (1) mit konvexem f eindeutig.

Bew von Kor. 5: $\|u(0)-v(0)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$, da $u(x,0) = v(x,0) = u_0(x)$

$\overset{S.4}{\Rightarrow} \|u(t)-v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \quad \forall t \in (0,T)$ ∎

Bem: Also Lsgen a) i) und b) ii) zu Burgers oben sind eindeutige zulässige Schock-Lsgen.

Bew. von Satz 4:

Sei $t \in (0,T)$.

- u, v zulässig $\Rightarrow u(\cdot,t)-v(\cdot,t)$ stückw. stetig

  seien $y_1(t), \dots, y_{L-1}(t)$ mit $\underset{y_0(t)}{\overset{\shortparallel}{-\infty}} < y_1(t) < \dots < y_{L-1}(t) < \underset{y_L(t)}{\overset{\shortparallel}{\infty}}$

  die Kurven, wo $(u-v)(\cdot,t)$ Vorzeichen wechselt oder u oder v unstetig ist. (Einfachheitshalber sei $L<\infty$)

- Sei $\delta_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } u-v>0 \text{ auf } (y_{j-1}(t), y_j(t)) \\ -1, & \text{falls } u-v<0 \text{ ——— '' ———} \end{cases}$

$$\Rightarrow \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sum_{j=1}^{L} \int_{y_{j-1}(t)}^{y_j(t)} \delta_j \cdot \big(u(x,t)-v(x,t)\big)\,dx \qquad (*)$$

$$\frac{d}{dt}\big(\| \dots \|\big) = \sum_{j=1}^{L} \int_{y_{j-1}(t)}^{y_j(t)} \delta_j \big(\partial_t u(x,t) - \partial_t v(x,t)\big)\,dx$$

$$+ \sum_{j=1}^{L} \delta_j \Big[(u-v)(y_j(t)-,t)\,y_j'(t) - (u-v)(y_{j-1}(t)+,t)\,y_{j-1}'(t)\Big]$$

$$\overset{\partial_t u = -\partial_x(f(u))}{=} - \sum_{j=1}^{L} \delta_j \,(f(u)-f(v))\Big|_{y_{j-1}}^{y_j} + \sum_{j=1}^{L} \delta_j\,[\dots]$$

$$=: \sum_{j=1}^{L} \sum_{\pm} B_j^{\pm}, \quad \text{wobei } B_j^+ = \delta_j\Big[-(f(u)-f(v))(y_j(t)-,t) + (u-v)(y_j(t)-,t)\,y_j'(t)\Big]$$

$$B_j^- = \delta_j\Big[(f(u)-f(v))(y_{j-1}(t)+,t) - (u-v)(y_{j-1}(t)+,t)\,y_{j-1}'(t)\Big]$$

- wir bestimmen nun das Vorzeichen von B_j^+

Fall A: u, v stetig in y_j

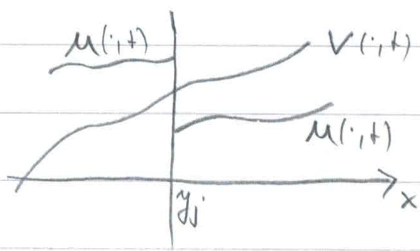
Vorzeichen-Wechsel $\Rightarrow u(y_j) = v(y_j) \Rightarrow f(u(y_j)) = f(v(y_j))$

$\Rightarrow B_j^+ = 0$

Fall B: v stetig, u unstetig in y_j, $\operatorname{sign}(u-v)$ wechselt

$\operatorname{sign}(u-v)$ wechselt in $y_j \Rightarrow v(y_j) \in \,/\underbrace{u(y_j-)}_{=:u_l}, \underbrace{u(y_j+)}_{=:u_r}/$

$$\left(/a,b/ := \begin{cases} [a,b] & \text{falls } a<b \\ [b,a] & b<a \end{cases} \right)$$

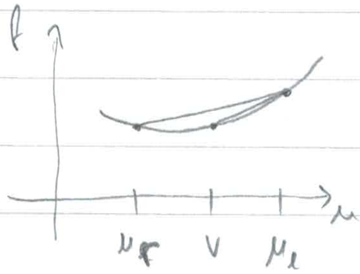


LSU $\Rightarrow f'(u_l) > f'(u_r) \overset{f \text{ konvex}}{\Rightarrow} u_l > u_r \Rightarrow u_l > v > u_r \Rightarrow \delta_j = 1$

$$\left.\begin{matrix} u_l - v > 0 \\ \delta_j = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{sign}(B_j^+) = \operatorname{sign}\left[-\frac{f(u_l)-f(v)}{u_l - v} + y_j'(t) \right]$$

$$\overset{RHB}{=} -\operatorname{sign}\left[\frac{f(u_l)-f(v)}{u_l-v} - \frac{f(u_l)-f(u_r)}{u_l-u_r} \right]$$

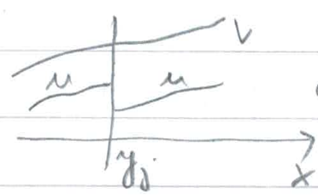
$= -1$, da f konvex (Sekantensteigung wächst)



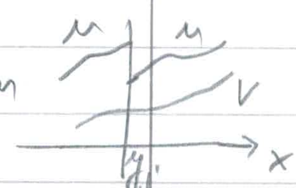
Fall C: u & v unstetig, $\operatorname{sign}(u-v)$ wechselt

↳ analog ($B_j^+ < 0$)

Fall D: v stetig, u unstetig, $\operatorname{sign}(u-v)$ wechselt <u>nicht</u>



oder



<u>Beh:</u> $B_j^+ + B_{j+1}^- = 0$

Denn $\delta_j = \delta_{j+1}$ s.d.

$$B_j^+ + B_{j+1}^- = \delta_j \Big[-(f(u) - \cancel{f(v)})(y_j(t)-,t) + (f(u) - \cancel{f(v)})(y_j(t)+,t)$$
$$+ \big((u - \cancel{v})(y_j(t)-,t) - (u-\cancel{v})(y_j(t)+,t) \big) y_j'(t) \Big]$$

$$= \delta_j \left[-f(u_l) + f(u_r) + (u_l - u_r) y_j'(t) \right]$$

$$\overset{RHB}{=} \delta_j \left([f]_{y_j} - [u]_{y_j} \cdot \frac{[f]_{y_j}}{[u]_{y_j}} \right) = 0$$

Also $\sum_{\ell} \sum_{j=1}^{L} B_j^{\ell} < 0 \Rightarrow \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1}$ mon. fallend

Bem: Also für konvexe Flüsse f sichern LSU und RHB Eindeutigkeit!

→ $\boxed{\text{Seite } 103{,}5}$

Ziel: Eindeutigkeit auch für allgemeinere f.

Def: Oleinik-Schock-Ungleichungen (OSU)

Für eine Schock-Lsg mit dem Sprung $[u] = u_r - u_l$ heißen

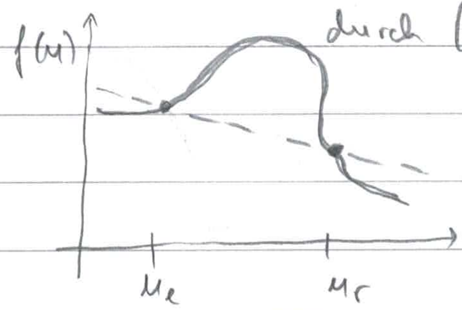
$$\frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \geq \lambda \quad \forall v \in]u_l, u_r[\text{, wobei } \lambda = \frac{[f]}{[u]}$$

die OSU.

Bem: Geometrische Bedeutung von OSU:

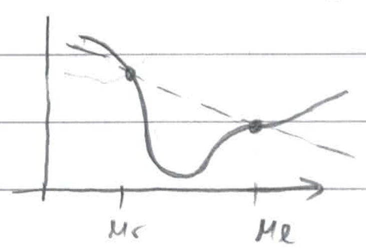
a) $u_l < u_r$

Dann OSU $\Leftrightarrow$ f liegt auf $[u_l, u_r]$ oberhalb der Sekante durch $(u_l, f(u_l))$, $(u_r, f(u_r))$



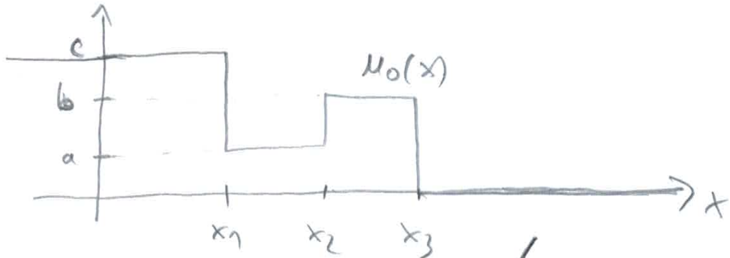
b) $u_l > u_r$

OSU $\Leftrightarrow$ f liegt auf $[u_r, u_l]$ unterhalb der Sekante



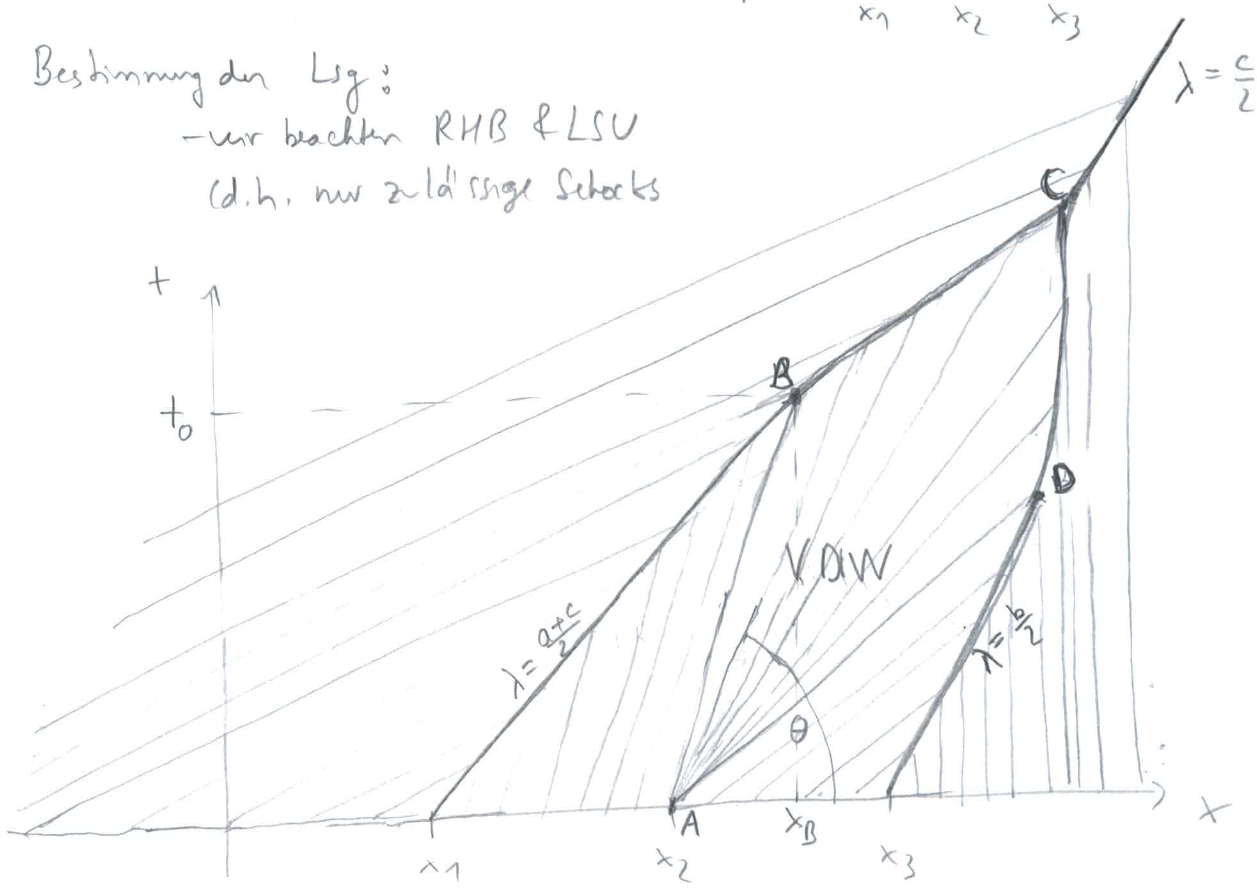
Bsp: (Schocks treffen sich)

Burgers Gl. mit $u_0(x)$:



Bestimmung der Lsg:

- wir beachten RHB & LSU
(d.h. nur zulässige Schocks)



Wenn ein Schock eine VDW trifft, beugt er sich.

Nach Korollar 5 ist diese Lsg eindeutig (zwischen Lsgen mit endlich vielen Schocks), da $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ konvex.

Schock BC:

Sei θ der Winkel der Charakteristiken im VDW: $\tan\theta = \frac{t}{x-x_2}$

Schock-Stelle: $(t, \gamma(t))$

- $(t_0, \gamma(t_0)) = B$
- RHB $\Rightarrow \gamma'(t) = \frac{1}{2}(u+c)$, u durch θ eindeutig bestimmt
- $u = u(\theta) = u\left(\tan^{-1}\left(\frac{t}{x-x_2}\right)\right) = u\left(\tan^{-1}\left(\frac{t}{\gamma(t)-x_2}\right)\right)$

Also
$$\left.\begin{aligned} &\gamma(t_0) = x_B \\ &\gamma'(t) = \frac{1}{2}\left(u\left(\tan^{-1}\left(\frac{t}{\gamma(t)-x_2}\right)\right)+c\right) \end{aligned}\right\} \text{ODE-AWP für } \gamma(t)$$
($\Rightarrow \gamma(t)$ eindeutig bestimmt)

(analog für DC)

<u>Bem</u>: Es gilt $\quad OSU \iff \dfrac{f(v)-f(u_r)}{v-u_r} \leq \lambda \quad \forall v \in /u_l, u_r/$

(Bew: Übung)

<u>Plan</u>: 1) Def. den Entropie-Lsg (physikalisch motiviert)
2) Satz: Entropie-Lsgen sind eindeutig (ohne Beweis)
3) OSU sind äquivalent zur Entropiebedingung für konvexe Entropien

<u>Def</u> (<u>mathematische Entropie</u>)
Eine glatte Abbildung $(S,F): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt ein <u>Entropie-Paar</u>, wenn jede stetig diffbare Lsg von (1)

$$\partial_t (S(u)) + \partial_x (F(u)) = 0 \tag{6}$$

erfüllt.
(S,F) heißt konvexes Entropie-Paar, falls $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex.

<u>Bem</u>: Falls S gegeben, dann kann für F gelöst werden.

$$\partial_t (S(u)) = S'(u)\, \partial_t u = - S'(u) f'(u)\, \partial_x u$$

$$\partial_x (F(u)) = F'(u)\, \partial_x u$$

Also (6) $\iff$ $F'(u) = S'(u) f'(u) \qquad (7)$

$$F(u) = \int_0^u S'(v) f'(v)\, dv$$

<u>Bsp</u>: Burgers-Gl.
Wir versuchen mit $S(u) = u^4$.

$$\partial_t S(u) = 4u^3 \partial_t u \overset{\text{Burgers}}{=} -4u^4 \partial_x u = -\frac{4}{5} \partial_x (u^5)$$

$$\Rightarrow F(u) = \frac{4}{5} u^5 .$$

<u>Def</u>: u heißt eine <u>Entropie-Lsg</u> von (1), falls u eine schwache Lsg ist und

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} S(u)\, \partial_t \varphi + F(u)\, \partial_x \varphi \, dx\, dt \geq 0 \qquad (8)$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)),\ \varphi \geq 0.$

für alle Entropie-Paare (S,F).

<u>Bem</u>: • Physikalische Entropie (Maß der Unordnung) kann nicht abfallen in der Zeit

$\Rightarrow$ Negentropie := − Entropie kann nicht zunehmen.

• $\int_{\mathbb{R}} S(u)(x,t)\, dx$ ist analog zur Negentropie.

Es gilt nämlich: Falls $F(u)(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, dann gilt für klass. Lsgen u

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} S(u(x,t))\, dx \leq 0.$$

<u>Bew</u>: $(8) \underset{u \in C^1}{\Rightarrow} -\partial_t (S(u)) - \partial_x (F(u)) \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} S(u)\, dx \geq 0$ ∎

<u>Satz 6</u> Falls $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, dann hat (1) mit der AB $u(\cdot,0) = u_0$ eine eindeutige Entropielösung.

<u>Bew</u>: [Godlewski, Raviart, Hyperbolic Systems of Conserv. Laws, 1991, § II.5]

($BV(\mathbb{R}) = \{ g \in L^1(\mathbb{R}) : \|g\|_{BV} < \infty \}$, wobei $\|g\|_{BV} = \|g\|_{L^1} + \sup_P \sum_{j=1}^{N-1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)|$ und P sind Partitionen $-\infty < x_1 < \dots < x_N < \infty$.)

<u>Satz 7</u> Sei u eine schwache Lsg, die klassisch (d.h. C^1) ist bis auf endlich viele diffbare Sprunglinien (Schocks), welche alle die RHB erfüllen. Dann sind äquivalent:

(i) u ist eine Entropie-Lsg für alle konvexe Entropie-Paare

(ii) OSU gelten in allen Schocks.

OBdA gebe es nur einen Schock $\gamma(t)$.

Sei $\lambda := \gamma'(t)$.

Zerlege $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}}$ in (8) in $\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)}$, $\int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty$

$$1) \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} S(u)\, \partial_t \varphi \, dx\, dt = \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\gamma(t)} S(u) \varphi \, dx \right) dt}_{=0,\ \text{da } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))} - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \partial_t (S(u)) \varphi \, dx\, dt$$

$$- \int_0^\infty S(u(\gamma(t)-,t))\, \lambda(t)\, \varphi(\gamma(t))\, dt$$

analog:

$$2) \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty S(u) \partial_t \varphi \, dx\, dt = -\int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty \partial_t (S(u)) \varphi \, dx\, dt + \int_0^\infty S(u(\gamma(t)+,t))\ \lambda(t) \varphi(\gamma(t))\, dt$$

$$3) \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} F(u)\, \partial_x \varphi \, dx\, dt \overset{(P.I.)}{=} -\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \partial_x (F(u)) \varphi \, dx\, dt + \int_0^\infty F(u(\gamma(t)-,t))\ \varphi(\gamma(t))\, dt$$

$$4) \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty F(u)\, \partial_x \varphi \, dx\, dt = -\int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty \partial_x (F(u)) \varphi \, dx\, dt - \int_0^\infty F(u(\gamma(t)+,t))\ \varphi(\gamma(t))\, dt$$

Also (8) $\Leftrightarrow$

$$0 \geq \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \underbrace{\left[\partial_t (S(u)) + \partial_x (F(u))\right]}_{=0} \varphi \, dx\, dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \underbrace{\left[\partial_t (S(u)) + \partial_x (F(u))\right]}_{=0} \varphi \, dx\, dt$$

$$- \int_0^\infty \lambda(t) \left\{ S(u(\gamma(t)+,t)) - S(u(\gamma(t)-,t)) \right\} \varphi(\gamma(t))\, dt$$

$$+ \int_0^\infty \left\{ F(u(\gamma(t)+,t)) - F(u(\gamma(t)-,t)) \right\} \varphi(\gamma(t))\, dt \qquad \forall\, 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda(t)\,[S(t)] + [F(t)] \leq 0 \qquad (*) \qquad ([S],[F] = \text{Sprung in } S, F)$$

Mit den RHB und $u_r(t) := u(\gamma(t)+,t)$, $u_l(t) := u(\gamma(t)-,t)$:

$$(*) \Leftrightarrow 0 \geq \int_{u_l(t)}^{u_r(t)} (-\lambda(t)\, S'(v) + F'(v))\, dv \overset{(7)}{=} \int_{u_l}^{u_r} S'(v)\, (-\lambda(t) + f'(v))\, dv$$

$$= \int_{u_l}^{u_r} S'(v)\, (-\lambda v + f(v))'\, dv$$

$$\overset{(P.I.)}{=} -\int_{u_l}^{u_r} S''(v)\,(-\lambda v + f(v))\,dv + S'(u_r)(-\cancel{\lambda u_r} + \underbrace{f(u_r)}_{\overset{(RHB)}{=} f(u_l)+\lambda(\cancel{u_r}-u_l)}) - S'(u_l)(-\lambda u_l + f(u_l))$$

$$= -\int_{u_l}^{u_r} S''(v)\,(-\lambda v + f(v))\,dv + (-\lambda u_l + f(u_l))\big(S'(u_r) - S'(u_l)\big)$$

$$= -\int_{u_l}^{u_r} S''(v)\big(-\lambda(v-u_l) + f(v) - f(u_l)\big)\,dv$$

$$= \int_{u_l}^{u_r} S''(v)\,(v-u_l)\left(\lambda - \frac{f(v)-f(u_l)}{v-u_l}\right)dv \qquad (**)$$

- S konvex (ud glatt) $\Leftrightarrow$ $S'' \geq 0$
- OBdA sei $u_r > u_l$. Dann $v - u_l > 0$, also

$$(**) \Leftrightarrow \quad 0 \geq \lambda - \frac{f(v)-f(u_l)}{v-u_l} \qquad \forall v \in [u_l, u_r].$$

∎

<u>Korollar 8</u> In der Klasse der Entropie-Lsgen mit konvexen E-Paaren, wo die Lsngen klassisch sind bis auf endlich viele Sprunglinien, welche alle RHB erfüllen, ist die Lsg vom Cauchy-Problem zu (1) mit konvexem f eindeutig.

<u>Bew:</u> Für f konvex ist LSU $\Leftrightarrow$ OSU (cf. Übung).

Nach S. 7 ist in der betrachteten Lsg-Klasse

OSU $\Leftrightarrow$ Entropie-Bed. für konvexe Entr.-Paare.

Und nach Koroll. 5 gilt also Eindeutigkeit

∎

5.6. Viskositätsmethode

↳ liefert Existenz schwacher Lsgen, die die Entropie-Ungl. für konvexe Entr.-Paare erfüllen

Betrachte die skalare Erhaltungsgl. (in 1D) mit einer kleinen viskosen Regularisierung:

$$(9) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x (f(u^\varepsilon)) = \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

mit $\varepsilon > 0$ (klein).

- PDE-Theorie garantiert: Lsgen von (9) sind klassisch und eindeutig. (also keine Schocks in u^ε)
- (9) ist physikalisch motiviert: $\varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon$ modelliert Viskosität, die bei jeder Strömung präsent ist

<u>Def</u> (Viskositätsmethode)

Ein Funktion u heißt Lsg mit Viskositätsmethode, falls u^ε aus (9) gleichm. beschränkt sind und punktweise fast überall gegen u konvergiert, d.h. $\exists C > 0$: $\quad \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])} \leq C \quad \forall \varepsilon > 0$

und $\quad u(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(x,t)$ für fast alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$.

<u>Satz 9</u> (Existenz schwacher Lsgen & Entropie-Ungl.)

Sei u ein Lsg mit Viskositätsmethode. Dann ist u eine schwache Lsg von (1) mit den Anfangsdaten u_0. Außerdem erfüllt u die Entropie-Ungl. (im Distributionssinn) für jeden konvexen Entropie-Paar, d.h.

$$(10) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} S(u) \partial_t \varphi + F(u) \partial_x \varphi \, dx \, dt \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))$$

für jeden konvexen Entropie-Paar (S,F).

Bew: ① z.z. u schwache Lsg

u^ε starke Lsg von (9) $\Rightarrow$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times[0,T)) \quad \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_t u^\varepsilon + \partial_x(f(u^\varepsilon))\right)\varphi \, dx\, dt = \varepsilon \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u^\varepsilon \varphi \, dx\, dt$$

$\overset{P.I.}{\Rightarrow}$ u^ε auch schwache Lsg:

$$(*) \quad -\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon \partial_t\varphi + f(u^\varepsilon)\partial_x\varphi \, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi\, dx = \varepsilon \int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon \partial_x^2\varphi \, dx\, dt$$

- $u^\varepsilon(x,t) \to u(x,t)$ für f.a. (x,t) $\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $f(u^\varepsilon(x,t)) \to f(u(x,t))$ für f.a. (x,t)
- $u^\varepsilon, f(u^\varepsilon)$ beschr. gleichm. in ε $\Rightarrow$ $\exists\, L^1$-Majorante für $u^\varepsilon\partial_t\varphi$, $f(u^\varepsilon)\partial_x\varphi$, $\varepsilon u^\varepsilon\partial_x^2\varphi$
  (z.B. $\sup_{\varepsilon>0} \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T))}\cdot|\partial_t\varphi|$)

~~Major. Konvergenz~~

$$\Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0}(*) \iff -\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u\partial_t\varphi + f(u)\partial_x\varphi\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi\, dx \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$$

② z.z. Entropie-Ungl. (10)

Multipliziere (9) mit $S'(u^\varepsilon)$:

$$S'(u^\varepsilon)\partial_t u^\varepsilon + \underbrace{S'(u^\varepsilon)f'(u^\varepsilon)}_{\overset{(7)}{=} F'(u^\varepsilon)}\partial_x(u^\varepsilon) = \varepsilon S'(u^\varepsilon)\partial_x^2 u^\varepsilon$$

$\iff$

$$\partial_t S(u^\varepsilon) + \partial_x F(u^\varepsilon) = \varepsilon S'(u^\varepsilon)\partial_x^2 u^\varepsilon$$

Nun: $\partial_x^2(S(u^\varepsilon)) = \partial_x(S'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon) = S''(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2 + S'(u^\varepsilon)\partial_x^2 u^\varepsilon$

S konvex (d.h. $S''\geq 0$) $\Rightarrow$ $S''(u^\varepsilon)(\partial_x^2 u^\varepsilon)\geq 0$

Also: $S'(u^\varepsilon)\partial_x^2 u^\varepsilon \leq \partial_x^2(S(u^\varepsilon))$

$$\Rightarrow \partial_t(S(u^\varepsilon)) + \partial_x(F(u^\varepsilon)) \leq \varepsilon\partial_x^2(S(u^\varepsilon)) \qquad (**)$$

Für (10) betrachte das distributionelle Limes von (**):

Sei $0\leq\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$. Dann

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \left[\partial_t(S(u^\varepsilon)) + \partial_x(F(u^\varepsilon))\right]\varphi\, dx\, dt \leq \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2(S(u^\varepsilon))\varphi\, dx\, dt$$

Nach P.I.

$$(***) \quad -\int_0^T\int_{\mathbb{R}} S(u^\varepsilon)\partial_t\varphi + F(u^\varepsilon)\partial_x\varphi\, dx\, dt \leq \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}} S(u^\varepsilon)\partial_x^2\varphi\, dx\, dt$$

- S, F stetig $\Rightarrow$ $S(u^\varepsilon) \to S(u)$, $F(u^\varepsilon) \to F(u)$ f.ü. in $\mathbb{R} \times (0,T)$
- $S(u^\varepsilon), F(u^\varepsilon)$ beschr. gleichm. in ε $\Rightarrow$ $S(u^\varepsilon)\partial_t \varphi$, $F(u^\varepsilon)\partial_x \varphi$, $S(u^\varepsilon)\partial_x^2 \varphi$ haben eine (bzgl. ε) gleichm. L^1-Majorante

$\xRightarrow{\text{major. Konvergenz}}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (***) \iff -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} S(u)\partial_t \varphi + F(u)\partial_x \varphi \, dx\, dt \leq 0 \quad \forall\ 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$$

$\blacksquare$

Bsp: Verkehr Fluss: Ampel-Problem

Sei $u(x,t)$ = Fahrzeugdichte [Fahrz./m]

$j(x,t)$ = Flussdichte [Fahrz./s]

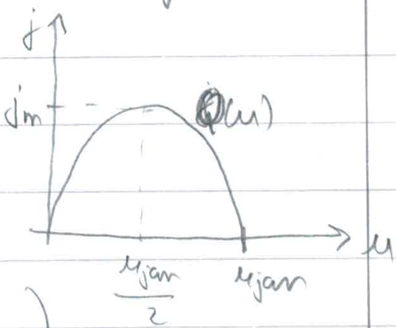
$v(x,t)$ = Fluss-Geschw. [m/s], $v = \frac{j}{u}$

= Geschw. des Verkehrs an der Stelle x zur Zeit t

Fahrzeug-Erhaltung:

(11) $\quad \partial_t u + \partial_x j = 0$

Einfaches Modell von j: $\quad j = Q(u) = c_{max}\, u \left(1 - \frac{u}{u_{jam}}\right)$



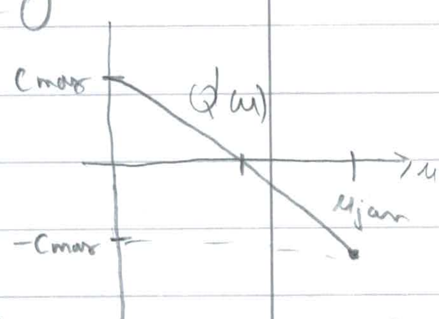
max. Flussdichte: $0 \overset{!}{=} Q'(u) = c_{max}\left(1 - 2\frac{u}{u_{jam}}\right)$

$\iff u = \frac{u_{jam}}{2}$

$\Rightarrow j_m = Q\left(\frac{u_{jam}}{2}\right) = \frac{1}{4} u_{jam} \cdot c_{max}$

(Flussgeschw. bei max. Flussdichte: $\frac{j_m}{\frac{1}{2}u_{jam}} = \frac{1}{2} c_{max}$)

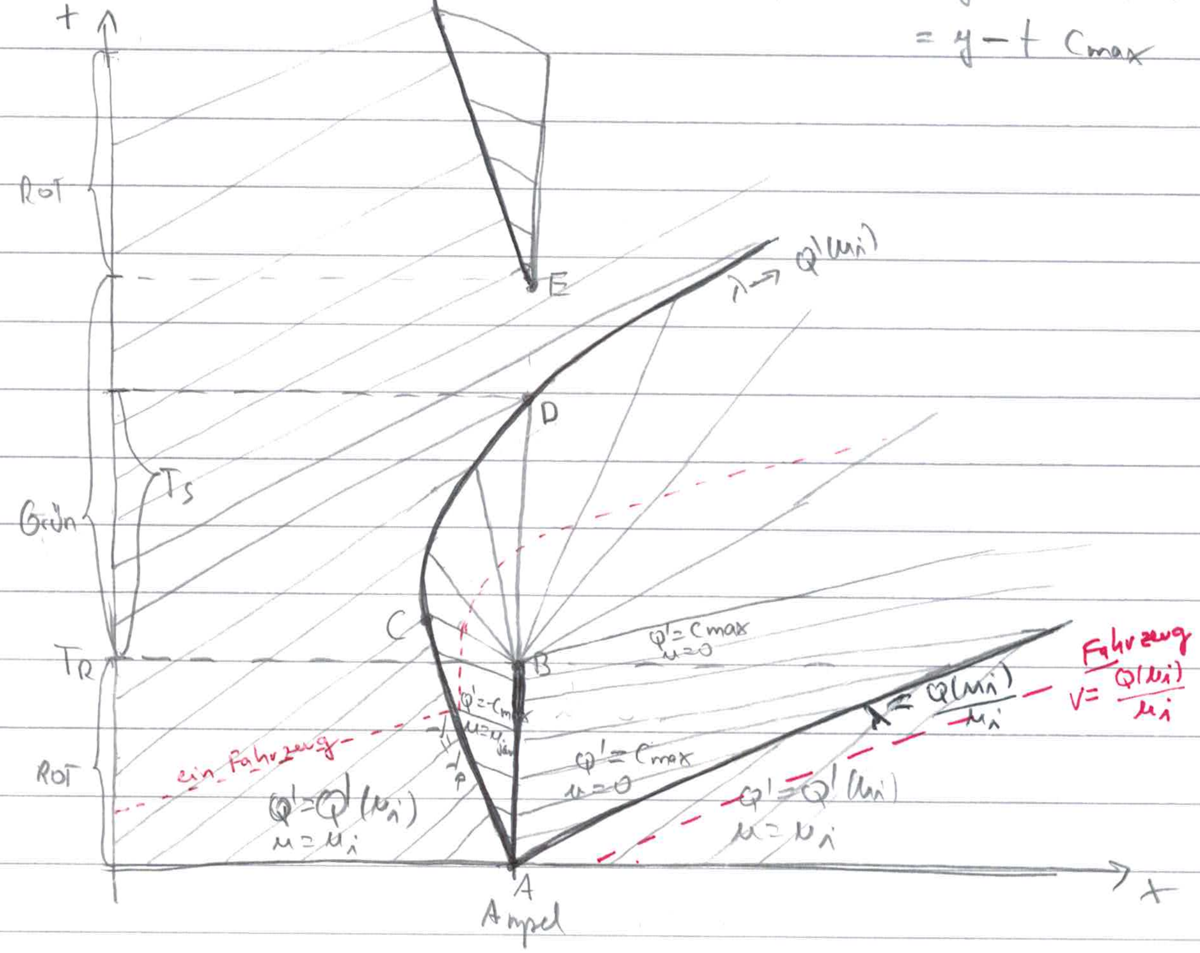
(11) wird zu $\quad \partial_t u + \underbrace{c_{max}\left(1 - 2\frac{u}{u_{jam}}\right)}_{= Q'(u)} \partial_x u = 0$



Problem: Fluss mit konstanter Fahrzeugdichte $u = u_l < \frac{1}{2} u_{jam}$ kommt zu einer Ampel.

Charakteristiken • des ankommenden Flusses: $x = y + t\,\underbrace{Q'(\mu_i)}_{>0 \text{ da } \mu_i < \frac{1}{2}\mu_{jam}}$

• des stehenden Flusses vor der Ampel: $x = y + t\,Q'(\mu_{jam})$
$= y - t\,C_{max}$



Schock vor der roten Ampel:

$$\text{RHB:}\quad \lambda = \frac{Q(\mu_{jam}) - Q(\mu_i)}{\mu_{jam} - \mu_i} = -\frac{Q(\mu_i)}{\mu_{jam} - \mu_i} =: \lambda_R$$

hinter der roten Ampel:

$$\text{RHB:}\quad \lambda = \frac{Q(0) - Q(\mu_i)}{0 - \mu_i} = \frac{Q(\mu_i)}{\mu_i} \quad (> Q'(\mu_i))$$

- Aus B startet eine VDW
- Schock C-D: analog zum letzten Bsp. (ODE für $x(t)$ herleiten)
- Werte von μ in VDW:
  - μ ist konstant entlang Charakteristiken

$$\Rightarrow x = x_A + (t - T_R)\,Q'(\mu) \quad \Rightarrow Q'(\mu) = \frac{x - x_A}{t - T_R}$$

$$\Rightarrow C_{max}\left(1 - 2\frac{\mu}{\mu_{jam}}\right) = \frac{x - x_A}{t - T_R}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x - x_A}{(t - T_R)C_{max}}\right)\mu_{jam}$$

- BO: $Q' = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\mu_{jam}}{2} \Rightarrow j = j_m$, d.h. die größte Flussdichte ist an der Ampel !!

Frage: minimales grün-Intervall T_G, sodass der Schock durchkommt, ist $T_G = T_S$. Berechne T_S.

- gesamter angekommener Verkehr während $(0, T_R + T_S)$: $(T_R + T_S) \cdot Q(\mu_1)$
- Fluss durch die Ampel während $(T_R, T_R + T_S)$: $T_S \cdot j_m$

$$\Rightarrow (T_R + T_S)\, Q(\mu_1) = T_S \cdot j_m$$

$$\Leftrightarrow T_S = \frac{T_R\, Q(\mu_1)}{j_m - Q(\mu_1)}$$

Bem: Fahrzeug-Trajektorie (rote Kurve): gegeben durch die Geschwindigkeit

$$v = \frac{dx}{dt} = c_{max}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{jam}}\right)$$

offenbar: $v = \frac{dx}{dt} = c_{max}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{jam}}\right) > c_{max}\left(1 - 2\frac{\mu}{\mu_{jam}}\right) = Q'(\mu)$

$v \geq 0$