Maßtheorie

Tomáš Dohnal
Sommersemester 2018, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

15. Juli 2018

(überarbeitete und erweiterte Mitschrift aus der Vorlesung von Prof. Carl,
Sommer 2017,
ursprünglich getippt von Paul Kramer)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bezeichnungen: Sei X eine beliebige Menge.

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P(X) := \{A : A \subset X\}$ ist die Potenzmenge zu X
- Sei $A \subset X$. $A^c := X \setminus A$ ist die Komplemente von A.
- Sei $A \subset X$.
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \quad \text{ist die charakteristische Funktion von } A.$$
- für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P(X)$ ist
    * $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n := \{x \in X : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$ (Limes-superior)
    * $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n := \{x \in X : \exists\ n_0(x) \in \mathbb{N}, \text{ sodass } x \in A_n \forall n \geq n_0\}$ (Limes-inferior)
    * $(A_n)_n$ konvergent, falls $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$. Dann $\lim_{n\to\infty} A_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$
    * $(A_n)_n$ wachsend, falls $A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$; und fallend, falls $A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Wir werden (versuchen) Mengen immer mit großen Buchstaben, z.B. A, und Mengensysteme mit großen kalligraphischen Buchstaben, z.B. $\mathcal{A}$ zu bezeichnen.

1.1 Inhaltsproblem/Maßproblem

Maßproblem: Was ist ein passender Begriff für den Inhalt/Volumen?

Genauer: gesucht wird eine Abbildung $\mu : P(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, sodass

- $\forall (A_n)_{n\geq 1}$ mit $A_n \in P(\mathbb{R}^n)$ und $(A_n)_n$ paarweise disjunkt gilt $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (σ-Additivität)
- $\mu(A + b) = \mu(A)\ \forall b \in \mathbb{R}^n, A \in P(\mathbb{R}^n)$ (Translationsinvarianz)
- $\mu(TA) = \mu(A)\ \ \forall T \in O(n)$ and $A \in P(\mathbb{R}^n)$ (Rotationsinvarianz)
- $\mu([0, 1]^n) = 1$
- $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A, B \in P(\mathbb{R}^n), A \subset B$ (Monotonie)

$$\text{Intuitiv soll } \mu \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente}(n = 0) \\ \text{Länge einer Kurve}(n = 1) \\ \text{Inhalt einer Fläche}(n = 2) \\ n\text{−dimensionaler Inhalt von Teilmengen in } \mathbb{R}^n\ (n \geq 3) \end{cases} \text{sein.}$$

Auswahlaxiom.
Es sei $(A_\lambda)_{j\in J}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Funktion $a : J \to A := \bigcup_{j\in J} A_j$ mit der Eigenschaft $a(j) \in A_j$ für alle $j \in J$.

Satz 1.1 (Vitali) Das Maßproblem ist unlösbar.

Beweis. (mit Hilfe des Auswahlaxioms)

Betrachte die Äquivalenz in $\mathbb{R}^n$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

$A \subset [0,1]^n$ enthalte für jede Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten. Dann ist $(q+A)_{q\in\mathbb{Q}^n}$ eine abzählbare Familie disjunkter Mengen und $[0,1]^n \subset \cup_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n}(q+A)$.

$$1 = \mu([0,1]^n) \leq \mu(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n}(q+A)) \overset{\sigma-\text{Add.}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n}\mu(q+A) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n}\mu(A)$$

$$\Rightarrow \mu(A) > 0$$

Gleichzeitig:

$$[0,2)^n \supset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n}(q+A) \quad {}^1$$

$$\Rightarrow 2^n \geq \mu([0,2)^n) \geq \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[0,1)^n}\mu(A) \quad {}^2$$

Aber: $\#(\mathbb{Q}^n \cap [0,1)^n) = \infty \;\Rightarrow\; \mu(A) = 0$ (Widerspruch). □

Das Maßproblem ist unlösbar in $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ sogar mit endlicher Additivität statt der σ-Additivität.

Satz 1.2 (Banach-Tarski) Sei $n \geq 3$ und $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *beliebige* Mengen mit nicht-leerem Inneren. Dann gibt es disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \subset \mathbb{R}^n$ und Bewegungen (Rotationen, Translationen) $\beta_1, \ldots, \beta_m$, s.d. $\beta_1(C_1), \ldots, \beta_m(C_m)$ disjunkt sind und $A = \cup_j C_j, B = \cup_j \beta_j(C_J)$.

z.B.: $A = B_1(0), B = B_1(0) \cup B_1((2,0,\ldots,0))$. Die Einheitskugel kann in endlich viele Stücke zerlegt werden und diese in zwei volle Einheitskugeln bewegt werden!

Bemerkung 1.1 Ein bereits bekanntes „Maß“: das **Jordan-Maß** m.

Konstruktion:

- für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist $[a,b) := \Pi_{i=1}^n [a_i, b_i)$ (Hyperrechteck)
- $m([a,b)) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$
- $\mathcal{F}^n := \{A \subset \mathbb{R}^n : A = \cup_{j=1}^m [a^{(j)}, b^{(j)}), m \in \mathbb{N}, a^{(j)}, b^{(j)} \in \mathbb{R}^n \text{ für alle } j\}$ (Figuren in $\mathbb{R}^n$)
- $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan-messbar, falls A in $\mathcal{F}^n$ approximierbar ist, d.h.

$$m_*(A) := \sup_{S\subset A, S\in\mathcal{F}^n} m(S) = \inf_{S\supset A, S\in\mathcal{F}^n} m(S) =: m^*(A)$$

  Dann heißt $m(A) := m^*(A)$ das Jordan-Maß von A.

Beispiel 1.2 $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist nicht Jordan-messbar, weil:

- für $S \subset A, S \in \mathcal{F}^1$ gilt $S = \emptyset \quad \Rightarrow \; m_*(A) = 0$
- für $S \supset A, S \in \mathcal{F}^1$ gilt $S \supset [0,1] \quad \Rightarrow \; m^*(A) = 1$

Es ist also klar, dass es nicht sinnvoll ist einen Inhalt oder ein Maß auf ganz $P(\mathbb{R}^n)$ (bzw. $P(X)$ für eine beliebige Menge X) zu definieren. Wir werden uns auf *messbare* Mengen beschränken.

[1] rechts fehlen $r \in [0,2)^n$ mir $r_j > 1$ für ein j und $r_j = a + b$ mit $a \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

[2] $[0,2)^n \subset [0,1]^n + \{0,1\}^n$. Bem.: $\#(\{0,1\}^n) = 2^n$.

1.2 Das Riemann-Integral

Die Maßtheorie ist eng mit der Integrationstheorie verknüpft. Wir kennen bisher vor allem das Riemann-Integral. Dies hat aber wesentliche Nachteile.

1) $R(\mathbb{R}^n)$, d.h. die Menge von Riemann-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, ist **nicht reichhaltig genug**.

Beispiel 1.3 $f := \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$

Behauptung: $\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert nicht im Riemann-Sinn.

Beweis. Sei $Z := \{0 = x_0, ..., x_N = 1\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$. $I_i := x_i - x_{i-1}$.

$$U(f,Z) = \sum_{i=1}^{N} m_i |I_i| = 0, \text{ wobei } m_i = \inf_{x\in I_i} f(x)$$

$$O(f,Z) = \sum_{i=1}^{N} M_i |I_i| = 1, \text{ wobei } M_i = \sup_{x\in I_i} f(x)$$

Also ist $U(f,Z) = 0, O(f,Z) = 1$. Damit $f \notin R([0,1])$. $\square$

Bemerkung 1.4 $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ist aber Lebesgue-integrierbar, wie wir in Abschnitt ??? zeigen.

2) Das Riemann-Integral ist **mit dem Grenzprozess nicht gut verträglich**.

Beispiel 1.5 Wir zeigen, dass sogar der (punktweise) Limes von monoton wachsenden Folgen von gleichmäßig beschränkten Riemann-integrierbaren Funktionen nicht Riemann-integrierbar sein muß.

Es ist bekannt, dass falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig bis auf endlich viele Punkte $a_1, ..., a_n$ in $[a,b]$ ist, dann ist $f \in R([a,b])$. Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $Q_n := \{q_1, ..., q_n\} \subset \mathbb{Q}\cap[0,1]$, sodass $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \lim_{n\to\infty} Q_n$. Wir definieren jetzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \chi_{Q_n}(x),$$

Es ist $f_n \in R([0,1])\ \forall n,\ f_n(x) \le f_{n+1}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I$ und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x).$$

Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\,x}_{=0} = 0,$$

aber die Grenzfunktion ist nicht Riemann-integrierbar, cf. Bsp. 1.3. Dieses Beispiel sollte verglichen werden mit dem Satz von der monotonen Konvergenz für meßbare Funktionen.

<u>**Ziele der Vorlesung:**</u> Wir werden einen allgemeinen Integralbegriff einführen, der auf dem Begriff des "Maßes-von Mengen einer gewissen (zunächst beliebigen) Grundmenge X beruht. Im Spezialfall, dass die Grundmenge $X = \mathbb{R}^n$ ist, liefert dieser Maßbegriff eine Erweiterung des Jordan-Inhalts zum "Lebesgue-Maß". Als nächstes konstruieren wir für ein gegebenes Maß ein Integral. Zum Lebesgue-Maß konstruieren wir das „Lebesgue-Integral", welches damit eine Erweiterung des Riemann-Intergrals ist. Dieser Erweiterungsprozess ist im gewissen Sinne ein Vervollständigungsprozess, ähnlich der Vervollständigung der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen.

- allgemeine Konstruktion vom Maß auf einer beliebigen Grundmenge X
- Lebesgue-Maß ($X = \mathbb{R}^n$)
- Definition des Integrales bzgl. eines Maßes
- Lebesgue-Integral (bzgl. des Lebesgue-Maßes)
- Konvergenzsätze
- L^p-Räume
- Produktmaße, Satz von Fubini
- ....

Beispiele guter Bücher zur Maßtheorie und Integrationstheorie:

- Elstrodt [1]
- Forster [2]
- Werner [3]

2 σ-Algebren

Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

Definition 2.1 $\mathcal{R} \subset P(X)$ heißt ein Ring, falls gilt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies B \setminus A := \{x \in X | x \in B \land x \notin A\} \in \mathcal{R}$

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

Aus Punkt (iii) folgt natürlich $A_1, ..., A_n \in \mathcal{R} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{R}$.

Definition 2.2 Ein Ring $\mathcal{R} \subset P(X)$ mit $X \in \mathcal{R}$ heißt eine Algebra auf X.

Definition 2.3 Eine σ-Algebra auf X ist eine Algebra $\mathcal{A}$, die abgeschlossen bzgl. abzählbarer Vereinigung ist, d.h.

$$A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Bemerkung 2.4 1) Für ein Ring $\mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{R}$, weil $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

2) Für eine Algebra $\mathcal{A}$ gilt $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, weil $A, X \in \mathcal{A}$ und $A^c = X \setminus A$.

3) Da $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$, ist (1) äquivalent zu

$$A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

4) σ-Algebren sind die wichtigsten Mengensysteme für die Maßtheorie.

Beispiel 2.5 Sei $A \subset X$.

1. $\{\emptyset, A\}$ ist ein Ring
2. $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ ist eine Algebra
3. Jede endliche Algebra, also z.B. die in 2., ist eine σ-Algebra.
4. $P(X)$ ist die größte σ-Algebra; $\{X, \emptyset\}$ ist die kleinste σ-Algebra.
5. Das System von abzählbaren Teilmengen von X ist ein Ring. Falls X abzählbar ist, dann ist das System eine σ-Algebra.
6. Das System der beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist ein Ring aber keine Algebra.

Lemma 2.1 $\mathcal{F}^n$ ist ein Ring (Ring der n-dimensionalen Figuren).

Beweis. Wir brauchen erst das:

Hilfslemma: Sei $I := (a, b], J := (c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$I \setminus J \in \mathcal{G}^n := \{A \subset \mathbb{R}^n : A = \bigcup_{j=1}^{m} I_j, m \in \mathbb{N}, (I_j)_j \text{ paarweise disjunkte Intervalle in } \mathbb{R}^n\}.$$

Der Beweis kann mit Hilfe einer Induktion in n geführt werden und ist eine Übungsaufgabe.

Wir notieren folgende zwei Resultate

(i) $A \in \mathcal{G}^n \;\Rightarrow\; A \setminus I \in \mathcal{G}^n$ für jedes Intervall I in $\mathbb{R}^n$. Dies gilt, weil $A = \cup_{j=1}^m I_j$ mit $(I_j)_j$ paarweise disjunkt und deshalb $A \setminus I = \cup_{j=1}^m (I_j \setminus I)$ mit $(I_j \setminus I)_j$ paarweise disjunkt.

(ii) $A \in \mathcal{F}^n \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{G}^n$. Um dies zu zeigen, schreiben wir erst $A = \cup_{j=1}^m I_j$ mit (nicht unbedingt paarweise disjunkten) Intervallen $(I_j)_j$. Es ist

$$A = \underbrace{\underbrace{I_1 \cup (I_2 \setminus I_1)}_{=I_1 \cup I_2} \cup (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2))}_{=I_1 \cup I_2 \cup I_3} \cup \cdots \cup (I_m \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_{m-1})),$$

wobei $I_1, I_2 \setminus I_1, I_3 \setminus (I_1 \cup I_2), \ldots, I_m \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_{m-1})$ paarweise disjunkt sind und jedes nach dem Hilfslemma in $\mathcal{G}^n$ liegt.

Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{F}^n$ ein Ring ist.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}^n$, da $\emptyset = (a, a]$.
2. Sei $A, B \in \mathcal{F}^n$. Zu zeigen: $A \setminus B \in \mathcal{F}^n$.

Es ist (da auch $A \in \mathcal{G}^n$ nach (ii)):

$$\begin{aligned}
A \setminus B &= \left(\bigcup_{j=1}^{m_1} I_j\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m_2} J_k\right) \qquad (I_j, J_k \text{ Hyperrechtecke mit } (I_j)_j \text{ paarweise disjunkt})\\
&= \bigcup_{j=1}^{m_1} \left(I_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m_2} J_k\right)\right)\\
&= \bigcup_{j=1}^{m_1} \underbrace{(\ldots \underbrace{((\underbrace{I_j \setminus J_1}_{\in \mathcal{G}^n \text{ (Hilfslemma)}}) \setminus J_2)}_{\in \mathcal{G}^n \text{ nach (i)}} \setminus J_3) \ldots) \setminus J_{m_2}}_{\in \mathcal{G}^n} \in \mathcal{F}^n,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt wegen der paarweise Disjunktheit von $(I_j)_j$ folgt.

3. Sei $A, B \in \mathcal{F}^n$. Zu zeigen ist $A \cup B \in \mathcal{F}^n$.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \in \mathcal{F}^n,$$

weil $A \in \mathcal{G}^n, B \setminus A \in \mathcal{G}^n$ und $A, B \setminus A$ disjunkt sind.

□

2.1 Erzeuger und Borelsche Mengen

Behauptung Ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf X, dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf X.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Definition 2.6 Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{E} \subset P(X)$ ein Mengensystem. Die kleineste $\mathcal{E}$ enthaltende σ-Algebra heißt die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra, bezeichnet $\sigma(\mathcal{E})$. $\mathcal{E}$ heißt deren Erzeuger.

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subset P(X), \mathcal{A} \text{ ist } \sigma-\text{Alg.} \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

Die wichtigste σ-Algebra ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ - das System von Borelmengen. Diese werden typischerweise mit Hilfe der Figuren, cf. Bem. 1.1, konstruiert.

Definition Sei $\mathcal{F}^n$ das System der Figuren in $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \sigma(\mathcal{F}^n)$$

heißt die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißt eine Borelmenge.

Satz 2.2 Für folgende Mengensysteme in $\mathbb{R}$ gilt $\sigma(\mathcal{D}_j) = \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall j = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 :=& \{(-\infty, r] : r \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{D}_2 :=& \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{D}_3 :=& \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{Q}\} \\
\mathcal{D}_4 :=& \{(-\infty, r] : r \in \mathbb{Q}\} \\
\mathcal{D}_5 :=& \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ offen}\} \\
\mathcal{D}_6 :=& \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\} \\
\mathcal{D}_7 :=& \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ kompakt}\}
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.7 Analoges gilt auch für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Borelmengen kann man also definieren, zum Beispiel, als Mengen, die durch abzählbare Vereinigungen, Durchschnitte und relative Komplementen aus offenen Mengen gebildet werden können.

Beweis. Wir notieren uns erst die folgenden Implikationen.

- $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}' \implies \sigma(\mathcal{D}) \subset \sigma(\mathcal{D}')$
- Falls $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, dann $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

1. z.z.: $\sigma(\mathcal{D}_4) = \sigma(\mathcal{D}_1)$
   - Es ist $\mathcal{D}_4 \subset \mathcal{D}_1 \implies \sigma(\mathcal{D}_4) \subset \sigma(\mathcal{D}_1)$.
   - Wir zeigen: $\mathcal{D}_1 \subset \sigma(\mathcal{D}_4)$

   Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle eine Folge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}, r_k \in \mathbb{Q}$ mit $r_k > r$ und $r_k \to r$. Dann ist

   $$(-\infty, r] = \underbrace{\bigcap_k \underbrace{(-\infty, r_k]}_{\in \mathcal{D}_4}}_{\in \sigma(\mathcal{D}_4)} \quad [3]$$

   Damit ist $\mathcal{D}_1 \subset \sigma(\mathcal{D}_4)$. Also $\sigma(\mathcal{D}_1) \subset \sigma(\mathcal{D}_4)$.

2. z.z.: $\sigma(\mathcal{D}_3) = \sigma(\mathcal{D}_4)$
   - Es ist $\mathcal{D}_4 \subset \sigma(\mathcal{D}_3)$, denn:
     Zu $r \in \mathbb{Q}$ wähle rationale Zahlen $r_k > r$ mit $r_k \to r$. Damit ist

   $$(-\infty, r] = \underbrace{\bigcap_k \underbrace{(-\infty, r_k)}_{\in \mathcal{D}_3}}_{\in \sigma(\mathcal{D}_3)}$$

   Also ist $\sigma(\mathcal{D}_4) \subset \sigma(\mathcal{D}_3)$.

[3] Def. von $\sigma(\mathcal{D}_4)$ und Eigenschaft von σ-Algebren, cf. Bem. 2.4

- Es gilt auch $\mathcal{D}_3 \subset \sigma(\mathcal{D}_4)$, denn:
  Zu $r \in \mathbb{Q}$ wähle $r_k \in \mathbb{Q},\ r_k < r,\ r_k \to r$. Dann ist

$$\underbrace{(-\infty, r)}_{\in \mathcal{D}_3} = \underbrace{\bigcup_k \underbrace{(-\infty, r_k]}_{\in \mathcal{D}_4}}_{\in \sigma(\mathcal{D}_4)}$$

  Also ist $\mathcal{D}_3 \subset \sigma(\mathcal{D}_4)$.

3. $\sigma(\mathcal{D}_5) = \sigma(\mathcal{D}_6)$ ist trivial, da $\sigma-$Algebren abgeschlossen bezüglich des Komplementenbilden sind.

Die restlichen Gleichheiten bleiben dem Leser als Übungsaufgabe zu zeigen. $\square$

Definition 2.8 Sei $X \neq \emptyset$, $E \subset X$, $\mathcal{E} \subset P(X)$.

$$\mathcal{E} \cap E := \{F \cap E : F \in \mathcal{E}\}$$

heißt die Spur von $\mathcal{E}$ auf E

3 Inhalte, Prämaße und Maße

Sei X eine beliebige Menge (nicht unbedingt $X \subset \mathbb{R}^n$), $\mathcal{E} \subset P(X)$ ein beliebiges Mengensystem.

Ziel: Untersuchung von speziellen Abbildungen der Form

$$\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty],$$

wobei

- $x + \infty = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\infty + \infty = \infty$
- Sind $a_k \geq 0\ \forall k$, dann bedeutet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$$

  entweder die Reihe divergiert oder ein $a_{k_0} = \infty$ für ein k_0.

Definition 3.1 Sei $\mathcal{R} \subset P(X)$ ein Ring.

(a) $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt ein Inhalt, falls

  (i) $\mu(\emptyset) = 0$

  (ii) endliche Additivität: $\mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m \mu(A_k)$, falls $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkte Mengen

(b) Ein Inhalt μ heißt Prämaß, falls

  (iii) σ-Additivität: $\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$ für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{R}$.

(c) Ein Prämaß $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ auf einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A} \subset P(X)$ heißt ein Maß auf $\mathcal{A}$. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann ein Maßraum.

Beispiel 3.2 (1) Sei X eine Menge, $\mathcal{A} = P(X)$. Sei $\mu : P(X) \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) = \infty$ für $A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset$. μ ist ein Maß.

(2) Sei $X \neq \emptyset$, $x \in X$ beliebig fest. Sei $\mathcal{A} \subset P(X)$ eine σ-Algebra. Definiere eine Mengenfunktion $\mu_x : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ durch

$$\mu_x(A) := \chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A \\ 1 & \text{falls } x \in A \end{cases}$$

μ_x ist ein Maß (s.g. Einheitsmasse im Punkt x).

Allgemeiner: $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty], \mu := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu_{x_j}$ mit $x_j \in X, \alpha_j \geq 0$ für alle j ist ein Maß. (Massen der Größe α_j in Punkten x_j)

Bemerkung: Für $N = \infty$ ist μ ein Maß, falls $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < \infty$.

(3) Zählmaß: Sei $\mathcal{A} \subset P(X)$ eine σ-Algebra. Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} \#(A) & \text{d.h. Anzahl der Elemente von } A\text{, falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

definiert. μ ist ein Maß.

(4) Sei X eine abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A} \subset P(X)$ die Algebra aller Teilmengen von X, die endlich sind oder deren Komplement endlich ist. Dann ist $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A^c \text{ endlich} \end{cases}$$

ein Inhalt aber kein Prämaß, da $\infty = \mu(X) \neq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{x_j\})$, wobei $\{x_1, x_2, \dots\} = X$.

(5) $(a,b] \subset \mathbb{R}$. Definere λ durch:

$$\lambda((a,b]) := b - a$$

Ist $A \in \mathcal{F}^1$, so lässt sich A darstellen als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle $(a_i, b_i]$. Also

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \tag{$*$}$$

Definiere

$$\lambda(A) := \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Für die Wohldefiniertheit von λ auf $\mathcal{F}^1$ ist die Unabhängigkeit von $\lambda(A)$ von der Darstellung $(*)$ nachzuweisen. Setze hierfür

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

χ ist die charakteristische Funktion der Menge A. Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \chi_{(a_i,b_i]}(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(a_i,b_i]}(x)\,\mathrm{d}\,x}_{=b_i-a_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \\
&= \lambda(A),
\end{aligned}$$

wobei das Integral das Riemannintegral ist (welches existiert, da χ_A eine Regelfunktion ist).
Weil die endliche Additivität offensichtlich ist, gilt, dass λ ein Inhalt auf $\mathcal{F}^1$ ist. Analog ist das Jordanmaß λ^n ein Inhalt auf $\mathcal{F}^n$. λ^n ist sogar ein Prämaß auf $\mathcal{F}^n$, wie in Satz 3.4 gezeigt wird.

Lemma 3.1 (Eigenschaften vom Inhalt) Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ und $A, B, A_j \in \mathcal{R}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es gilt:

(i) $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(ii) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

(iii) Falls $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind und $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$, dann

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j)$$

(iv) Angenommen μ ist σ-additiv und $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$, dann

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad (\sigma - \text{Subadditivität})$$

Beweis. (i) $\mathcal{R}$ is ein Ring $\implies B \setminus A \in \mathcal{R}$
$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

(ii) In

$$\begin{aligned}
B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) && (*) \\
A \cup B &= A \cup (B \setminus A) && (**)
\end{aligned}$$

sind die rechten Seiten disjunkte Vereinigungen. Also

$$\mu(A) + \mu(B) \overset{(*)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \overset{(**)}{=} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$$

(iii) $\cup_{j=1}^{N} A_j \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ gilt für alle $N \in \mathbb{N}$. Also

$$\underbrace{\mu(\cup_{j=1}^{N} A_j)}_{=\sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)} \leq \mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j)$$

gilt für jedes N.

(iv) Sei $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, B_3 := A_3 \setminus (A_2 \cup A_1)$ usw. Dann $\cup_{j=1}^{\infty} B_j = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Da B_j paarweise disjunkt sind, ist für jedes N

$$\mu(\cup_{j=1}^{N} B_j) = \sum_{j=1}^{N} \mu(B_j) \overset{(B_j \subset A_j)}{\leq} \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j).$$

Also

$$\mu(\cup_{j=1}^{N} A_j) \leq \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)$$

für jedes N.

□

Definition 3.3 Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Dann heißt $A \in \mathcal{R}$ eine μ-Nullmenge, falls $\mu(A) = 0$.

Korollar 3.2 Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ μ-Nullmengen, $A \in \mathcal{R}$. Es gelten die Implikationen:

(i) $A \subset \cup_{j=1}^{m} A_j, m \in \mathbb{N} \implies A$ ist μ-Nullmenge

(ii) $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j, \mu$ ist ein Prämaß $\implies A$ ist μ-Nullmenge

Beweis. (i) Trivial, wegen $m \in \mathbb{N}$, der Monotonie, und den Ringeigenschaften.

(ii) $A = \cup_{k=1}^{\infty} A \cap \left(A_k \setminus \cup_{j=1}^{k-1} A_j\right) \in \mathcal{R}$, wobei rechts eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ ist. Für jedes k ist die Menge eine Teilmenge von A_k. Da μ ein Prämaß ist, gilt also

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A \cap \left(A_k \setminus \cup_{j=1}^{k-1} A_j\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

□

Bemerkung 3.4 Für ein Maß μ auf einer σ-Algebra ist also $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ eine $\mu-$Nullmenge, falls A_j eine Nullmenge für jedes j ist.

Satz 3.3 (Prämaß-Eigenschaften) Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Für die Aussagen:

(i) μ ist ein Prämaß;

(ii) Sind $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ mit $A_j \in \mathcal{R}\ \forall j$ und

$$A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$$ [4]

so gilt $\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$; (Stetigkeit von unten)

[4] d.h. $(A_j)_j$ ist monoton und $A_j \nearrow A$

(iii) Sind $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ mit $A_j \in \mathcal{R}\ \forall j, \mu(A_1) < \infty$ und

$$A := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R},$$ [5]

so gilt $\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$; (Stetigkeit von oben)

(iv) Sind $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ mit $A_j \in \mathcal{R}\ \forall j, \mu(A_1) < \infty$ und

$$\emptyset = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j,$$

so gilt $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0$;

gilt

$$(i) \iff (ii) \Rightarrow (iii) \iff (iv).$$

Falls μ endlich, d.h. $\mu(A) < \infty\ \forall A \in \mathcal{R}$, dann sind alle Aussagen äquivalent.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $A_j \nearrow A$, $A_j, A \in \mathcal{R}$ für alle j. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
B_1 &:= A_1 \\
B_2 &:= A_2 \setminus A_1 \\
B_3 &:= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\
&\ \vdots \\
B_j &:= A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k
\end{aligned}$$

Dann sind die B_i paarweise disjunkt und es ist

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \quad A_j = \bigcup_{k=1}^{j} B_k$$

Da μ ein Prämaß ist, gilt also

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

[5] d.h. $(A_j)_j$ ist monoton und $A_j \searrow A$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $(B_j)_j \subset \mathcal{R}$ eine disjunkte Folge von Mengen B_j mit $B := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{R}$. Für $A_j := \bigcup_{k=1}^{j} B_k$ gilt

$$A_j \nearrow B.$$

Wegen (ii) also

$$\mu(B) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Wir haben $A \subset A_j \subset A_1$ $\forall j$. Deswegen $\mu(A_j) < \infty$ $\forall j$.

$$\begin{aligned}
&A_j \searrow A \implies A_1 \setminus A_j \nearrow A_1 \setminus A \\
&\mu(A_1) = \mu(A_j) + \mu(A_1 \setminus A_j) \overset{\mu(A_1),\mu(A_j)<\infty}{\Longrightarrow} \mu(A_1) - \mu(A_j) = \mu(A_1 \setminus A_j) \\
&\underbrace{\mu(A_1 \setminus A_j) \nearrow \mu(A_1 \setminus A)}_{\text{wegen (ii)}} \overset{\text{da } A\subset A_1}{=} \mu(A_1) - \mu(A) \\
&\implies \mu(A_j) \searrow \mu(A)
\end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): trivial

(iv) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $(A_j)_j$ eine Folge wie in (iii). Setze $B_j := A_j \setminus A$. Es ist $B_j \in \mathcal{R} \forall j$ und $B_j \searrow \emptyset$. Da $\mu(B_1) \leq \mu(A_1) \leq \infty$, gilt $\mu(B_j) \to 0$.

$$\begin{aligned}
&\mu(A_j) \overset{A\subset A_j}{=} \mu(B_j) + \mu(A) \overset{\mu(B_j)<\infty,\mu(A)<\infty \text{ da } A\subset A_1}{\Longrightarrow} \mu(B_j) = \mu(A_j) - \mu(A) \\
&\overset{\mu(B_j)\to 0}{\Longrightarrow} \mu(A_j) \to \mu(A).
\end{aligned}$$

Sei jetzt μ endlich. Wir zeigen (iv) $\Longrightarrow$ (ii).

Sei $(A_j)_j$ wie in (ii). Dann $A \setminus A_j \searrow \emptyset$ und $\mu(A \setminus A_1) < \infty$ (da $A \setminus A_1 \in \mathcal{R}$ und μ endlich). Nach (iv) gilt also $\mu(A \setminus A_j) \to 0$.

Nun $\mu(A) = \mu(A_j) + \underbrace{\mu(A \setminus A_j)}_{\to 0} \overset{\mu \text{ endlich}}{\Longrightarrow} \mu(A_j) \to \mu(A)$. □

Beispiel 3.5 Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} := P(\mathbb{N})$. Sei $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ das Zählmaß.
Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \mathbb{N} \\
A_2 &:= \mathbb{N} \setminus \{1\} \\
&\vdots \\
A_n &:= \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

Es ist $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Weiterhin ist $\mu(A_n) = \infty$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty \neq 0 = \mu(A).$$

Die Voraussetzung $\mu(A_1)$ in (iii) in Satz 3.3 ist also wesentlich.

Satz 3.4 Das Jordan-Maß definiert auf dem Ring der Figuren, d.h.

$$\lambda^n : \mathcal{F}^n \to [0,\infty], \mathcal{F}^n = \{\cup_{j=1}^m [a^{(j)}, b^{(j)}), m \in \mathbb{N}, a^{(j)}, b^{(j)} \in \mathbb{R}^n\}$$

ist σ-additiv, d.h. λ^n ist ein Prämaß.

Beweis. Dass λ^n ein Inhalt ist, ist offensichtlich, weil jedes $A_j \in \mathcal{F}^n$ als eine Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Hyperrechtecken $[a^{(i,j)}, b^{(i,j)})$ geschrieben werden kann.

σ-Additivität:

Sei $(A_j)_j \subset \mathcal{F}^n$ paarweise disjunkt, $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}^n$. Da $\lambda^n|_{\mathcal{F}^n}$ ein Inhalt ist, wie wir früher gezeigt haben, gilt nach Lemma 3.1

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda^n(A_j) \leq \lambda^n\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Es bleibt also nur $\geq$, also die σ-Subadditivität, zu zeigen.

Sei $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Wir benutzen folgende

Behauptung Für jedes $\varepsilon > 0, j \in \mathbb{N}$ gibt es $A', A'_j \in \mathcal{F}^n$ mit $\overline{A'} \subset A, A_j \subset \mathring{A}'_j$ und

$$\lambda^n(A') \geq (1-\varepsilon)\lambda^n(A), \qquad \lambda^n(A'_j) \geq (1+\varepsilon)\lambda^n(A_j).$$

Der Beweis wird dem Leser als Übung überlassen.

$\overline{A'}$ ist kompakt und $\overline{A'} \subset \bigcup_{j=1}^\infty \mathring{A}'_j$, wobei dies eine offene Überdeckung ist. Nach dem Satz von Heine-Borel gibt es auch eine endliche Teilüberdeckung, d.h.

$$\overline{A'} \subset \bigcup_{k=1}^m \mathring{A}'_{j_k}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir haben

$$(1-\varepsilon)\lambda^n(A) \leq \lambda^n(A') \leq \sum_{k=1}^m \lambda_n(A'_{j_k}) \leq (1+\varepsilon)\sum_{j=1}^\infty \lambda^n(A_j)$$

für $\varepsilon > 0$ beliebig. Also $\lambda^n(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \lambda^n(A_j)$.

□

Bemerkung 3.6 Das Prämaß λ^n aus Satz 3.4 heißt das Lebesguesche Prämaß auf $\mathcal{F}^n$, da es zum Lebesguemaß (auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n)$) fortgesetzt werden kann.

4 Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen (Lebesgue-Maß als Prototyp)

- Zugang nach Carathéodory (∼1914)

Sei X eine beliebige Menge.

Definition 4.1 Eine Abbildung $\eta : P(X) \to [0,\infty]$ heißt <u>äußeres Maß</u>, falls:

(i) $\eta(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset B \subset X \implies \eta(A) \leq \eta(B)$ (Monotonie)

(iii) $(A_j)_{j\geq 1} \subset P(X) \implies \eta\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \eta(A_j)$ (σ-Subadditivität)

Beispiel 4.2 Sei X eine Menge. Folgende $\eta : P(X) \to [0, \infty]$ sind äußere Maße:

1) $\eta(A) = 0 \quad \forall A \in P(X)$

2) $\eta(\emptyset) = 0, \quad \eta(A) = 1,\ \forall A \neq \emptyset$

3) $\eta(\emptyset) = 0, \quad \eta(A) = \infty,\ \forall A \neq \emptyset$

4) $\eta(A) = \begin{cases} 0, A \text{ höchstens abzählbar,} \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases}$

Satz 4.1 Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R} \subset P(X)$. Für $A \subset X$ setze:

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j) : (E_j)_j \subset \mathcal{R} \text{ mit } A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j \right\}.$$

(Infimum ist über alle Folgen $(E_j)_j \subset \mathcal{R}$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ zu bilden.)
Falls es keine Folge $(E_j)_j \subset \mathcal{R}$ gibt mit $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, dann setze $\mu^*(A) := \infty$.
Dann ist $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß.

Beweis. (i) $\mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Sei $A, B \in P(X)$ mit $A \subset B$. Dann ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, da jede Folge $(E_j)_j$, die B überdeckt, auch A überdeckt. Damit kann das Infimum nur kleiner werden.

(iii) Sei $(A_j)_j \subset P(X)$. Zu zeigen:

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j)$$

Annahme: $\mu^*(A_j) < \infty$ für alle j, anderenfalls ist die Ungleichung trivial.
Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es Mengen $E_i^{(j)} \in \mathcal{R}$, sodass

$$A_j \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i^{(j)} \text{ und } \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i^{(j)})$$

für alle j.

Wegen

$$\bigcup_{j=1}^\infty A_j \subset \bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty E_i^{(j)}$$

ist

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty E_i^{(j)}\right) \leq \sum_{i,j=1}^\infty \mu(E_i^{(j)}) \leq \sum_{j=1}^\infty \left(\mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

$\square$

Bemerkung 4.3 Äußere Maße sind i.A. nicht additiv also keine Inhalte. Insbesondere sind sie nicht σ-additiv.
Beispiel: $X = \{1, 2\}$. Dann ist

$$P(x) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Definiere Mengenfunktion μ durch

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0, \\ \mu(X) &= 2, \\ \mu(\{1\}) &= 1, \\ \mu(\{2\}) &= 2. \end{aligned}$$

Dies ist ein äußeres Maß, jedoch ist μ nicht additiv, denn:

$$\mu(\{1\} \cup \{2\}) = 2 < 3 = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\}).$$

Bemerkung 4.4 Zwar ist ein äußeres Maß μ auf $P(X)$ im allgemeinen kein Maß, jedoch gelingt es durch geeignete Einschränkung des äußeren Maßes auf eine in bestimmter Weise konstruierte Teil-σ-Algebra von $P(X)$, dass μ auf dieser ein Maß wird. Dies ist unser nächstes Ziel.

Eine Minimalforderung an ein Teilmengensystem M_μ von $P(X)$, sodass μ auf M_μ ein Maß wird, ist eine Additivitätseigenschaft von μ auf M_μ. In anderen Worten, durch Einschränkung auf ein kleineres Mengensystem wird ein äußeres Maß sogar σ-additiv. Diese Beobachtung geht auf Caratheodory zurück.

Dies legt folgende Definition nahe:

Definition 4.5 Sei $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \in P(X)$ heißt μ-messbar, wenn gilt:

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \quad \forall Q \in P(X).$$

Setze

$$M_\mu := \{A \in P(X) : \mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)\}$$

die Menge aller μ-messbaren Mengen oder auch das Mengensystem der additiven Zerleger bezüglich μ. Man sagt auch, dass die Mengen $A \in M_\mu$ die „Spaltungseigenschaft“ haben.

Satz 4.2 Sei $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß und M_μ wie in Definition 4.5. Dann ist M_μ eine σ-Algebra und $\mu : M_\mu \to [0, \infty]$ definiert ein Maß auf M_μ.

Beweis. Wir zeigen erst, dass M_μ ein Ring ist. Sei $A \in P(X)$ beliebig. Es gilt stets

$$Q = (Q \cap A) \cup (Q \cap A^c) \ \forall Q \in P(X).$$

Da μ subadditiv ist, gilt

$$\mu(Q) \leq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c).$$

Wir müssen also bei jeder Ring-Eigenschaft nur die andere Richtung $\geq$ in der Spaltungseigenschaft zeigen.

(i) Sei $Q \in P(X)$ beliebig. Dann ist

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap \emptyset) + \mu(Q \cap \emptyset^c)$$

Also ist $\emptyset \in M_\mu$.

(ii) Sei $A \in M_\mu$. Wir zeigen: $A^c \in M_\mu$. Es ist

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) = \mu(Q \cap A^c) + \mu(Q \cap A).$$

(iii) Wir zeigen zunächst, dass $A, B \in M_\mu \implies A \cup B \in M_\mu$ gilt.
Seien also $A, B \in M_\mu$ und $Q \in P(X)$ beliebig. Es ist

$$\mu(Q \cap A^c) = \mu(Q \cap A^c \cap B) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c), \tag{*}$$

weil $Q \cap A^c \in P(X)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} Q \cap (A \cup B) &= (Q \cap A) \cup (Q \cap B \cap (A \cup A^c)) \\ &= (Q \cap A) \cup (Q \cap B \cap A) \cup (Q \cap B \cap A^c) \\ &= (Q \cap A) \cup (Q \cap B \cap A^c). \end{aligned}$$

Da μ subadditiv ist, ist

$$\mu(Q \cap (A \cup B)) \leq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap B \cap A^c) \tag{**}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(\underbrace{Q \cap (A \cup B)^c}_{=Q \cap A^c \cap B^c}) &\overset{(**)}{\leq} \mu(Q \cap A) + \underbrace{\mu(Q \cap B \cap A^c) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c)}_{\overset{(*)}{=} \mu(Q \cap A^c)} \\ &= \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\ &= \mu(Q) \end{aligned}$$

Also ist $A \cup B \in M_\mu$.

(iv) $A, B \in M_\mu \implies A \setminus B \in M_\mu$ gilt wegen

$$A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c \in M_\mu,$$

wobei der letzte Schritt aus (ii) und (iii) folgt.

Damit ist M_μ ein Ring.

Als nächstes ist zu zeigen, dass M_μ eine σ-Algebra ist und dass die σ-Additivität für μ auf M_μ gilt.
Offensichtlich ist $X \in M_\mu$, also ist M_μ eine Algebra. Seien nun $A, B \in M_\mu$ disjunkt. Dann gilt

$$\mu(\underbrace{Q \cap (A \cup B)}_{=:\widetilde{Q} \in P(X)}) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap B) \quad \forall Q \in P(X).$$

Per Induktion erhalten wir: Seien $A_1, \ldots, A_n \in M_\mu$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\mu\left(Q \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(Q \cap A_j) \quad \forall Q \in P(X). \tag{***}$$

Definiere $B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j \in M_\mu$, wobei $(A_j)_j$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus M_μ ist. Später betrachten wir $n \to \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\begin{aligned} \mu(Q) =& \mu(Q \cap B_n) + \mu(Q \cap B_n^c) \qquad (\text{da } B_n \in M_\mu) \\ \overset{(***)}{=} & \sum_{j=1}^n \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap B_n^c). \end{aligned}$$

Sei jetzt $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ eine Erweiterung von B_n, so dass $(A_j)_j$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus M_μ ist. Dann ist $B_n \subset A$ und damit $A^c \subset B_n^c$. Wegen der Monotonie $\mu(Q \cap A^c) \leq \mu(Q \cap B_n^c)$ und

$$\mu(Q) \geq \sum_{j=1}^n \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap A^c).$$

Dann können wir auch zum Grenzwert übergehen:

$$\begin{aligned} \mu(Q) &\geq \sum_{j=1}^\infty \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap A^c) \qquad (4^*) \\ &\geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty Q \cap A_j\right) + \mu\left(Q \cap A^c\right), \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der σ-Subadditivität des äußeren Maßes μ folgt.

Wegen $\bigcup (Q \cap A_j) = Q \cap (\bigcup A_j) = Q \cap A$ folgt

$$\mu(Q) \geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

Damit ist $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in M_\mu$, falls $(A_j)_j \subset M_\mu$ disjunkt sind.

Außerdem, mit $Q = A$ in (4*), ist $\mu(A) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$. Wegen der σ-Subadditivität folgt dann

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j),$$

also μ ist σ-additivit auf M_μ.

Es bleibt noch zu zeigen, dass für $(A_j)_j \subset M_\mu$ auch $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in M_\mu$ (auch wenn $(A_j)_j$ nicht paarweise disjunkt sind).
Setze wie üblich

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ B_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann ist $(B_j)_j$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus M_μ. Damit ist

$$\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j \in M_\mu.$$

Also ist M_μ eine σ-Algebra. $\square$

Bemerkung 4.6 Nach Satz 4.1 wird von einem Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf dem Ring $\mathcal{R}$ ein äußeres Maß μ^* erzeugt. Nach Satz 4.2 ist insbesondere M_{μ^*} eine σ-Algebra und $\mu^*|_{M_{\mu^*}}$ ist ein Maß.

Folgende Fragen sollen nun beantwortet werden:

1) Ist $\mathcal{R} \subset M_{\mu^*}$?

2) Falls 1) mit ja beantwortet wird, wie stehen der Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ und μ^* zueinander, d.h. wie verhält sich $\mu(A)$ zu $\mu^*(A)$ für $A \in \mathcal{R}$?

Wie der folgende Satz von Caratheodory zeigt, die Antwort zu 1) ist positiv und $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu|_{\mathcal{R}}$, falls μ ein Prämaß ist.

Satz 4.3 (Fortsetzungssatz von Caratheodory) Sei $\mathcal{R} \subset P(X)$ ein Ring. Jedes Prämaß $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ kann zu einem Maß $\widetilde{\mu}$ fortgesetzt werden, wie folgt:

Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ^*-messbar, d.h. $\mathcal{R} \subset M_{\mu^*}$, mit μ^* aus Satz 4.1 und

$$\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu|_{\mathcal{R}}. \tag{3}$$

Außerdem ist $\widetilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{R}}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$.

Beweis. Falls (3) und $\mathcal{R} \subset M_{\mu^*}$ gelten, dann ist $\widetilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, weil μ^* ein Maß auf M_{μ^*} ist (nach Satz 4.2) und $\sigma(\mathcal{R}) \subset M_{\mu^*}$ (da $\mathcal{R} \subset M_{\mu^*}$; siehe den Anfang vom Beweis von Satz 2.2). Es bleiben lediglich zwei Aussagen zu beweisen:

(1) $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$

(2) $\mathcal{R} \subset M_{\mu^*}$

Zu (1). Sei $A \in \mathcal{R}$. Dann ist

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : (E_j) \subset \mathcal{R}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

Da $A \subset E_1$ für $E_1 = A$, ist

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Zu zeigen beliebt also $\mu^*(A) \geq \mu(A)$. Ist $\mu^*(A) = \infty$, so ist dies trivial. Sei also $\mu^*(A) < \infty$. Dann gibt es eine Folge $(E_j)_j \subset \mathcal{R}$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Es ist

$$A = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap E_j).$$

Nach Lemma 3.1 (iv) ist μ σ-subadditiv, also

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Nach dem Übergang zur Infimumbildung gemäß der Definition des äußeren Maßes folgt:

$$\mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Zu (2). Sei $A \in \mathcal{R}$ und $Q \subset X$ beliebig. Wir zeigen

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt wegen der Subadditivität von jedem äußeren Maß.

Für $\mu^*(Q) = \infty$ ist dies trivial. Sei also $\mu^*(Q) < \infty$. Dann gibt es eine Überdeckung von Q mit $(E_j)_j \subset \mathcal{R}$ und $Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Dann ist

$$Q \cap A \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A)$$

und

$$Q \cap A^c \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \cap A^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A^c).$$

Also kann sowohl $Q \cap A$ als auch $Q \cap A^c$ mit Folgen von Mengen aus $\mathcal{R}$ überdeckt werden. Also ist:

$$\mu^*(Q \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A)$$
$$\mu^*(Q \cap A^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A^c).$$

Wegen $E_j = (E_j \cap A) \cup (E_j \cap A^c)$ ist

$$\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(E_j \cap A) + \mu(E_j \cap A^c)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

wobei die letzte Gleichheit aus der (endlichen)Additivität folgt.

Die Infimumbildung (über Folgen $(E_j)_j$) auf beiden Seiten liefert die Behauptung.

□

Im Folgenden wird der Frage nach der Eindeutigkeit der Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß nachgegangen.

Beispiel 4.7 Sei X eine beliebige überabzählbare Menge, $\mathcal{R} \subset P(X)$ sei wie folgt erklärt:

$$\mathcal{R} := \{A \in P(X) : A \text{ endlich}\}$$

$$\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty], \; \mu(A) = 0 \; \forall A \in \mathcal{R}$$

Offenbar ist μ ein Prämaß. Es ist

$$\sigma(\mathcal{R}) = \{A \in P(X) : A \text{ oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}.$$

Nach Satz 4.3 lässt sich μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen. Es ist

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : (E_j) \subset \mathcal{R}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Falls A nicht durch $(E_j)_j$ überdeckbar ist, ist

$$\mu^*(A) = \infty.$$

$\widetilde{\mu} := \mu^*|_{M_{\mu^*}}$ ist ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$. Es gilt

$$\widetilde{\mu}(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ höchstens abzählbar,} \\ \infty & A \text{ überabzählbar.} \end{cases}$$

Andererseits sind für alle $r \in [0, \infty)$

$$\mu_r(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ höchstens abzählbar,} \\ r & A \text{ überabzählbar,} \end{cases}$$

Maße, die μ fortsetzen.

Bemerkung: Die Existenz von überabzählbaren Mengen $A_1, A_2 \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ würde die Additivität verletzen ($r \neq 2r$). Dafür müssten aber A_1^c, A_2^c abzählbar sein und aus $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ folgt $A_2 \subset A_1^c$, d.h. A_2 kann nicht überabzählbar sein.

Definition 4.8 Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ auf Mengensystem $\mathcal{S} \subset P(X)$ heißt <u>σ-endlich</u>, wenn es eine aufsteigende Folge $(A_j)_j \subset \mathcal{S}$ gibt, d.h. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, mit $\mu(A_j) < \infty$ für alle j und $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X$.

Beispiel 4.9 (i) Sei $\mathcal{F}^n \subset P(\mathbb{R}^n)$ der Ring der Figuren, $\mu = \lambda^n : \mathcal{F}^n \to [0, \infty]$ ist σ-additiv und σ-endlich.

Beweis. Seien $A_j = (-j, j]^n$. Es ist $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} Aj$ und $\lambda^n(A_j) = (2j)^n < \infty$. $\square$

(ii) $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ in Beispiel 4.7 ist σ-endlich, da $X = \cup_j A_j$ mit $A_j \in \mathcal{R}$ unmöglich ist.

Beispiel 4.10 Ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ein Maß, d.h. $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann heißt μ <u>endlich</u>. Jedes endliche Maß ist σ-endlich.

<u>Ziel:</u> Wir werden jetzt zeigen, dass für σ-endliches μ die Fortsetzung zu einem Maß $\widetilde{\mu}$ gemäß Satz 4.3 eindeutig ist.

Satz 4.4 (Eindeutigkeit der Fortsetzung zum Maß) Sei $\mathcal{R} \subset P(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein $\sigma-$endliches Prämaß. Falls $(X, \mathcal{A}', \mu')$ ein Maßraum ist, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}' \subset M_{\mu^*}$ und $\mu'|_{\mathcal{R}} = \mu$, dann

$$\mu' = \mu^*|_{\mathcal{A}'}.$$

Beweis. Erinnerung: Für $A \subset X$ ist $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : (E_j)_j \subset \mathcal{R}, A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j\}$.

1) Sei $A \in \mathcal{A}'$ und $(E_j)_j \subset \mathcal{R}$ mit $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Aus

$$\mu'(A) \leq \mu'(\cup_j E_j) \overset{\sigma-\text{Subadd.}}{\leq} \sum_j \mu'(E_j) \overset{\mu'|_{\mathcal{R}} = \mu}{=} \sum_j \mu(E_j)$$

folgt durch die Infimumbildung über die Folgen $(E_j)_j$:

$$\mu'(A) \leq \mu^*(A).$$

Falls es keine Folge $(E_j)_j \subset \mathcal{R}$ mit $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ gibt, dann ist $\mu * (A) = \infty$ und die Ungleichung folgt trivialerweise.

Also $\mu' \leq \mu^*$ auf $\mathcal{A}'$.

2) Wir zeigen jetzt $\mu' \geq \mu^*$ auf $\mathcal{A}'$.

Sei $A \in \mathcal{A}'$ beliebig. Wähle $(A_j)_j \subset \mathcal{R}$ paarweise disjunkt mit $\mu(A_j) < \infty$ für alle j und mit $X = \cup_j A_j$. Dies ist möglich wegen der σ-Endlichkeit von μ. $(A_j)_j \subset \mathcal{R}$ kann paarweise disjunkt gewählt werden durch den üblichen Trick $A_j \rightsquigarrow A_j \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i$.

Wir haben $A_j \cap A, A_j \setminus A \in \mathcal{A}$, (da $\mathcal{A}'$ eine Algebra ist). Dann folgt aus Schritt 1)

$$\mu'(A_j \cap A) \leq \mu^*(A_j \cap A), \tag{*}$$

$$\mu'(A_j \setminus A) \leq \mu^*(A_j \setminus A). \tag{**}$$

Außerdem,

$$\mu''(A_j \cap A) + \mu'(A_j \setminus A) \overset{\mu' \text{ Maß}}{=} \mu'(A_j) \overset{\mu'|_{\mathcal{R}}=\mu=\mu^*|_{\mathcal{R}}}{=} \mu^*(A_j) \overset{\mu^* \text{ Maß auf } M_{\mu^*}}{=} \mu^*(A_j \cap A) + \mu(A_j \setminus A).$$

Da $\mu'(A_j) = \mu(A_j) < \infty$, folgt daraus mit Hilfe von (*) und (**), dass

$$\mu'(A_j \cap A) = \mu^*(A_j \cap A) \qquad (\text{und } \mu'(A_j \setminus A) = \mu^*(A_j \setminus A)).$$

Also

$$\mu'(A) = \sum_j \mu'(A_j \cap A) = \sum_j \mu^*(A_j \cap A) \overset{\mu^* \text{ Maß auf } M_{\mu^*} \supset \mathcal{A}'}{=} \mu^*(\cup_j (A_j \cap A)) = \mu^*(A).$$

□

Korollar 4.5 Sei $\mathcal{R} \subset P(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches Prämaß. Dann ist die dort konstruierte Fortsetzung $\widetilde{\mu}$ aus Satz 4.3 von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ die einzig mögliche Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$.

Anwendung: Lebesgue-Maß

Es ist bekannt:

(a) Aus Lemma 2.1 folgt $\mathcal{F}^d$ ist ein Ring.

(b) $\mathcal{F}^d = \mathcal{G}^n$, also jede Figur kann als endliche Vereinigung disjunkter Intervalle dargestellt werden.

(c) $\lambda^n : \mathcal{F}^n \to [0, \infty]$ ist σ-endliches Prämaß, wobei $\lambda^n([a, b)) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

(d) Die Abbildung

$$\begin{aligned}(\lambda^n)^*(A) &:= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(I_j) : I_j \text{ ist ein Intervall für jedes } j, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(E_j) : (E_j) \subset \mathcal{G}^d, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}\end{aligned}$$

(mit $(\lambda^n)^*(A) := \infty$, falls es keine solche Folge $(E_j)_j$ gibt) ist ein äußeres Maß auf $P(\mathbb{R}^n)$ und ein Maß auf $M_{(\lambda^n)^*}$, also auch auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 4.11 $(\lambda^n)^*$-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, d.h. Mengen in $M_{(\lambda^n)^*}$, heißen Lebesgue-messbar.

Bemerkung: Es gilt, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq M_{(\lambda^n)^*}$, d.h. es gibt Lebesgue-messbar Mengen, die keine Borlemengen sind. Beispiele werden hier aber nicht konstruiert.

Nach (a)-(d) und Korollar 4.5, folgt: *Es gibt genau ein Maß λ^d auf $\mathcal{B}_n(\mathbb{R}^d)$, das Intervallen ihren Jordan-Inhalt zuordnet.*

Definition 4.12 Das Maß $(\lambda^n)^*(A)|_{M_{(\lambda^n)^*}}$ heißt das Lebesgue-Maß. Das Maß $(\lambda^n)^*(A)|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ heißt das Borel-Lebesgue-Maß. Oft werden beide einfach mit λ^n oder λ bezeichnet.

Frage: Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$ und μ^* das zugehörige äußere Maß. Wir wissen aus Satz 4.3, dass $(X, M_{\mu^*}, \mu^*|_{M_{\mu^*}})$ und $(X, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ Maßräume sind und $\sigma(\mathcal{R}) \subset M_{\mu^*}$. Wieviel größer ist aber M_{μ^*} als $\sigma(\mathcal{R})$? Die Antwort ist: nicht viel größer falls μ ein σ-endliches Prämaß ist, siehe Satz 4.6.

Definition 4.13 Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ($\mathcal{A}$ σ-Algebra) heißt vollständig, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ (μ-Nullmenge) auch jede Teilmenge von A zu $\mathcal{A}$ gehört (und damit auch das Maß 0 haben). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann ein vollständiger Maßraum.

Beispiel 4.14 Ist $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß, dann ist $\mu : M_\mu \to [0, \infty]$ ein vollständiges Maß.

Um dies zu zeigen, sei $N \in M_\mu$ mit $\mu(N) = 0$ und $\widetilde{N} \subset N$. Zu zeigen ist $\widetilde{N} \in M_\mu$, d.h. $\mu(Q) \geq \mu(Q \cap \widetilde{N}) + \mu(Q \cap \widetilde{N}^c)$ für alle $Q \in P(X)$. (Die andere Ungleichung gilt wegen der Subadditivität.) Es ist $\mu(\widetilde{N}) \leq \mu(N) = 0$, d.h. $\mu(\widetilde{N}) = 0$. Dann ist

$$\mu(Q \cap \widetilde{N}^c) + \underbrace{\mu(Q \cap \widetilde{N})}_{=0} \leq \mu(Q)$$

und zwar für alle $Q \in P(X)$.

Definition 4.15 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraumm, $\mathcal{N} := \{A \subset X : \mu(A) = 0\}$ das System der Nullmengen und $\widetilde{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$. Dann heißt

$$\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathcal{A}} \to [0, \infty], \widetilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}$$

die Vervollständigung von μ.

Bemerkung 4.16 Die Vervollständigung $\widetilde{\mu}$ ist offensichtlich vollständig und sie ist die vollständige Fortsetzung von μ mit minimalem Definitionsbereich.

Satz 4.6 Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$ und μ^* das äußere Maß zu μ. Dann ist $\mu^*|_{M_{\mu^*}}$ die Vervollständigung von $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$, d.h. $\widetilde{\sigma(\mathcal{R})} = M_{\mu^*}$.

Beweis. M_{μ^*} ist vollständig, also muss $\widetilde{\sigma(\mathcal{R})} \subset M_{\mu^*}$. Zu zeigen bleibt $\widetilde{\sigma(\mathcal{R})} \supset M_{\mu^*}$.

1. Sei $B \in M_{\mu^*}$ mit $\mu^*(B) < \infty$. Zu zeigen ist $B \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$.
   Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $(A_{n_j})_j \subset \mathcal{R}$ mit $\cup_j A_{n_j} \supset B, \sum_j \mu(A_{n_j}) \leq \mu^*(B) + \frac{1}{n}$. Sei jetzt $A := \cap_n \cup_j A_{n_j}$. Es ist $A \in \sigma(\mathcal{R})$. Da $B \subset A$, gilt $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

Nun wenden wir oberes Argument auf $A \setminus B$ statt B an (mit A, B wie oben). Dann gibt es also ein $C \in \sigma(\mathcal{R})$, sodass $A \setminus B \subset C$ und $\mu^*(A \setminus B) = \mu^*(C)$. Wir haben also (da $B \subset A$)

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) = \mu^*(C).$$

Wegen $\mathbb{B} \subset A, A \setminus B \subset C$ gilt $B = (A \setminus C) \cup (B \cap C)$, d.h. B hat die Form $D \cup N$ mit $D \in \sigma(\mathcal{R}), N \in \mathcal{N}$. Also $B \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$.

2. Sei jetzt $B \in M_{\mu^*}$ beliebig.
   μ ist σ-endlich, also gibt es ein $(E_j)_j \subset \mathcal{R}$, sodass $\cup_j E_j = X, \mu(E_j) < \infty$ für alle j. Nach Schritt 1 ist $B \cap E_j \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$ für alle j. Da $\widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$ eine σ-Algebra ist, gilt $B = \cup_j (B \cap E_j) \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$.

□

Beispiel 4.17 Das Lebesgue-Maß $\lambda^n|_{M_{(\lambda^n)^*}}$ ist die Vervollständigung des Borel-Lebesgue-Maßes $\lambda^n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$.

Satz 4.7 (Translationsinvarianz) Das Borel-Lebesgue-Maß $\lambda^n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ist translationsinvariant, d.h. für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda^n(x + A) = \lambda^n(A).$$

Beweis. Wir wissen, dass mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auch $x + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist. Sei $\mu_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ wie folgt erklärt:

$$\mu_x(A) := \lambda^n(x + A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mu_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein Maß. Da $\mu_x(I) = \lambda^n(x + I) = \lambda^n(I)$ für alle Intervalle, ist $\mu_x = \lambda^n$ auf $\mathcal{F}^n$. Nach Korollar 4.5 ist $\mu_x = \lambda^n$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n)$. □

Satz 4.8 Ist $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein translationsinvariantes Maß mit

$$\mu\left((0, 1]^n\right) =: C < \infty,$$

dann gilt: $\mu = C\lambda^n$.

Beweis. Wir zeigen erst $\mu = C\lambda^n$ für Würfeln in $(0, 1]^n$.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Betrachte

$$\mathcal{W}_m := \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{k_i - 1}{m}, \frac{k_i}{m} \right] : k_1, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, m\} \right\}$$

Es ist $\mathcal{W}_m$ die Menge der disjunkten Würfel mit Kantenlängen $\frac{1}{m}$ in $(0, 1]$.

Da μ translationsinvariant ist, folgt $\mu(W) = C_m \leq C$ für alle $W \in \mathcal{W}_m$. Das Lebesgue-Maß λ^n von W ist

$$\lambda^n(W) = \left(\frac{1}{m}\right)^n.$$

Da μ additiv ist und $(0, 1]^n = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_m} W$, ist

$$\begin{aligned} \mu\left((0, 1]^n\right) &= \sum_{W \in \mathcal{W}_m} \mu(W) \\ &= m^n C_m. \end{aligned}$$

Also ist $\mu(W) = C\left(\frac{1}{m^n}\right) = C\lambda^n(W)$.
Die Behauptung ist also gezeigt für alle $W \in \mathcal{W}_m$.

Jetzt betrachten wir verschobene Würfeln. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachte nun

$$\mathcal{V}_m := \left\{(a,b] \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) : b_i - a_i = \frac{1}{m}, i = 1, \dots, n\right\}.$$

Jedes Element von $\mathcal{V}_m$ erhält man durch Translation von Elementen aus $\mathcal{W}_m$. Also ist für alle $V \in \mathcal{V}_m$:

$$\mu(V) = \mu(W) = C\lambda^n(W) = C\lambda^n(V).$$

Im letzten Schritt zeigen wir $\mu = C\lambda^n$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Betrachte die Menge $\mathcal{J}(\mathbb{Q}^d)$ der halboffenen Intervalle mit rationalen Endpunkten. Jedes Element I aus $\mathcal{J}(\mathbb{Q}^n)$ lässt sich als disjunkte Vereinigung von Elementen $V_j, j = 1, 2, ...$ aus $\mathcal{V}_m$ für ein kleines m darstellen. Also ist für alle $I \in \mathcal{J}(\mathbb{Q}^n)$:

$$\mu(I) = \sum_j \mu(V_j) = \sum_j \lambda^n(V_j) = C\lambda^n(I).$$

Weiterhin gilt, dass $\mathcal{J}(\mathbb{Q}^n)$ die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt. Da μ σ-endlich auf $\mathcal{J}(\mathbb{Q}^n)$ ist, folgt mit Korollar 4.5 $\mu = C\lambda^n$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. □

Korollar 4.9 Das Lebesgue-Maß λ^n ist das einzige translationsinvariante Maß μ mit

$$\mu((0,1]^n) = 1.$$

Satz 4.10 (Approximationssatz für das Lebesgue-Maß ($\lambda := \lambda n$)) Für jedes $A \in M_\lambda$ gilt

(i) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(\mathcal{O}) : A \subset \mathcal{O}, \mathcal{O} \text{ offen}\}$,

(ii) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A, K \text{ kompakt}\}$.

Bemerkung 4.18 Es gilt also auch $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A, K \text{ abgeschlossen}\}$, da kompakte Mengen abgeschlossen sind. Die Ungleichung $\geq$ gilt nach der Monotonie.

Beweis. Erinnerung:

$$\lambda(A) = \inf\{\sum_j \lambda(I_j) \text{halboff. Intervalle in } \mathbb{R}^n, A \subset \cup_j I_j\}.$$

(i) Da $A \subset \mathcal{O}$ ist, ist $\lambda(A) \leq \lambda(\mathcal{O})$ für alle $\mathcal{O}$ mit $A \subset \mathcal{O}$. Also gilt $\leq$ in (i).
Nun zeigen wir, dass auch $\geq$ gilt. Für $\lambda(A) = \infty$ ist dies trivial. Sei also $\lambda(A) < \infty$.
Nach Definition von λ, gibt es $(I_j)_j$ halboffene Intervalle mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j m$$

sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lambda(A) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j).$$

Nun gibt es $(J_j)_j$ von offenen Intervallen mit $J_j \supset I_j$ und

$$\lambda(A) + 2\varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(J_j)$$

Also

$$\lambda(A) + 2\varepsilon \geq \inf \{\lambda(\mathcal{O}) : A \subset \mathcal{O}, \mathcal{O} \text{ offen}\}.$$

Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, sind wir fertig.

(ii) Sei $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ und $K \subset A$ kompakt. Dann ist für alle $K \subset A$.

$$\lambda(K) \leq \lambda(A).$$

Also ist

$$\sup_{K \subset A} \lambda(K) \leq \lambda(A).$$

Nun zeigen wir $\leq$ in (ii).
Sei erst zusätzlich A beschränkt. Dann gibt es ein $\overline{B_r(0)}$ mit

$$A \subset \overline{B_r(0)}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fest. Nach (i) gibt es eine offene Menge $\mathcal{O}$ mit

$$\overline{B_r(0)} \setminus A \subset \mathcal{O} \text{ und } \lambda\left(\overline{B_r(0)} \setminus A\right) + \varepsilon \geq \lambda(\mathcal{O}).$$

Sei nun $K := \overline{B_r(0)} \setminus \mathcal{O}$. Es ist K kompakt und $K \subset A$. Weiterhin ist $\lambda(A) = \lambda(A \setminus K) + \lambda(K)$. Ferner gilt, dass

$$(A \setminus K) \cup (\overline{B_r(0)} \setminus A) \subset \mathcal{O}.$$

Also ist $\lambda(A \setminus K) + \lambda(\overline{B_r(0)} \setminus A) \leq \lambda^d(\mathcal{O})$. Nun schätzen wir ab:

$$\lambda(A \setminus K) \leq \lambda(\mathcal{O}) - \lambda(\overline{B_r(0)} \setminus A) \leq \varepsilon.$$

Damit ist $\lambda(A) \leq \lambda(K) + \varepsilon$.
Zwischenergebis: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein kompaktes K_ε sodass $K_\varepsilon \subset A$ und $\lambda(A) \leq \lambda(K_\varepsilon) + \varepsilon$.
Sei $\varepsilon_j = \frac{1}{j}$ mit $j \in \mathbb{N}$ und $K_j \subset A$ kompakt. Dann ist

$$\lambda(A) \leq \lambda(K_j) + \frac{1}{j}.$$

Durch Übergang zum Supremum ist die Behauptung für beschränkte A gezeigt.
Sei nun $A \subset \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Setze

$$B_j := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq j\}$$

Es ist $\bigcup_j B_j = \mathbb{R}^n$. Definiere nun

$$A_j := A \cap B_j.$$

Es sind A_j beschränkt und $A_j \subset A$. Nach den vorherigen Betrachtungen gibt es kompakte Mengen K_j mit $K_j \subset A_j$ und $\lambda(A_j) \leq \lambda(K_j) + \frac{1}{j}$.
Wegen $\lambda(A_j) = \lambda(A_j \setminus K_j) + \lambda(K_j)$ gilt:

$$\lambda(A_j \setminus K_j) \leq \frac{1}{j} \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

Es ist für alle j: $A_j \subset A_{j+1}$ und

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A.$$

Mit der Stetigkeitseigenschaft des Maßes ist

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \lim_{j\to\infty} \lambda(A_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} \lambda(K_j).\end{aligned}$$

Das heißt zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert ein $j_0(\varepsilon)$ mit

$$|\lambda(A) - \lambda(K_j)| > \varepsilon$$

für alle $j \geq j_0(\varepsilon)$. Damit ist

$$\lambda(A) \leq \lambda(K_j) + \varepsilon.$$

Damit folgt die Behauptung.

□

5 Messbare Funktionen

Das Hauptziel der Definition von messbaren Funktionen ist später integrieren zu können. Wir schauen uns als Motivation den Unterschied von (uns schon bekanntem) Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral (welches später im Allgemeinen definiert wird) auf einem beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Für das Riemann-Integral zerlegt man die Abszissenachse, d.h. man wählt eine Zerlegung $Z := (x_j)_{j=0}^N$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. und definiert mit Hilfe der Obersumme $O(f, Z) := \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$ und der Untersumme $U(f, Z) := \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1}) \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$ das Oberintegral

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} O(f, Z)$$

und das Unterintegral

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} U(f, Z).$$

Falls $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, dann nennt man f Riemann-integrierbar und definiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Für das Lebesgue-Integral wird die Ordinatenachse zerlegt. Sie etwa $f([a, b]) = [m, M]$ mit $m, M \in \mathbb{R}$. Wir wählen eine Zerlegung $Y := (y_j)_{j=0}^N$ mit $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = M$. Für jedes Teilintervall definieren wir $A_j := f^{-1}[y_j, y_{j+1}]$ dessen Urbild. Die Obersumme und Untersumme sind jetzt $O_L(f, Y) := \sum_{j=1}^N y_j \lambda(A_j)$, $U_L(f, Y) := \sum_{j=1}^N y_{j+1} \lambda(A_j)$. Nötig ist hier die Voraussetzung, dass alle A_j Lebesgue-messbar sind. Falls

$$\sup_{Y \text{ Zerlegung von } [m,M]} U_L(f, Y) = \inf_{Y \text{ Zerlegung von } [m,M]} O_L(f, Y),$$

dann heißt f Lebesgue-integrierbar und man definiert $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) := \sup_{Y \text{ Zerlegung von } [m,M]} U_L(f, Y)$.

Anders geschrieben ist (für $f \geq 0$) das Lebesgue-Integral

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \sup\left\{ \int_{[a,b]} \psi(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) : \psi \text{ Treppenfunktion}, 0 \leq \psi \leq f \right\},$$

wobei für eine Treppenfunktion $\psi(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{B_j}(x)$ das Lebesgue-Integral als

$$\int_{[a,b]} \psi(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \lambda(B_j)$$

definiert wird. Diese Schreibweise erlaubt nämlich eine Verallgemeinerung des Integrals zu anderen Maßen und andern Integrationsbereichen (Mengen aus allgemeinen σ-Algebren).

Definition 5.1 Sei $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subset P(X)$ eine σ-Algebra. Dann heißt das Paar $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum

Definition 5.2 Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und $T : X_1 \to X_2$ eine Abbildung. T heißt messbar ($\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar) falls

$$T^{-1}(B) = \{x \in X_1 : T(x) \in B\} \subset \mathcal{A}_1$$

für alle $B \in \mathcal{A}_2$ gilt (d.h. $T^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$).

Im Spezialfall $(X_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n))$ heißt eine $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-messbare Funktion auch eine Borel-messbare Funktion.

Lemma 5.1 Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$ messbare Räume $(i = 1, 2, 3)$.

(a) $T : X_1 \to X_2$ ist genau dann messbar, wenn aus $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ folgt $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$, für alle $B \in \mathcal{E}$ ist.

(b) Sind $T_1 : X_1 \to X_2$ und $T_2 : X_2 \to X_3$ messbare Abbildungen, so ist

$$T_2 \circ T_1 : X_1 \to X_3$$

ebenfalls messbar.

(c) Stetige Abbildungen $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sind bezüglich der Borelschen σ-Algebren in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ messbar.

(d) Sei $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektionen definiert durch

$$\pi_j : x \mapsto x_j.$$

Dann ist $T : X_1 \to \mathbb{R}^n$ genau dann Borel-messbar, wenn alle Projektionen $\pi_j \circ T : X_1 \to \mathbb{R}$ messbar sind.

(e) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann Borel-messbar, wenn

$$f^{-1}((-\infty, r]) \in \mathcal{A}_1 \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Beweis. (a) Sei $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ und $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ für alle $B \in \mathcal{E}$. Definiere folgende Menge

$$\mathcal{B} := \left\{B \in \mathcal{A}_2 : T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\right\}.$$

Es ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_2$. Zu zeigen ist nur, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist. Dies ist einfaches Nachrechnen und bleibt dem Leser überlassen. Dann folgt $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}$. Also

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_2.$$

Für die Richtung $\Rightarrow$ ist nur zu bemerken, dass $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_2$.

(b) Nachrechnen.

(c) Folgt aus (a), da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ von den offenen Mengen erzeugt wird und für stetige Funktionen die Urbilder von offenen Mengen offen sind.

(d) Es sind $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $T : X_1 \to \mathbb{R}^n$ Borel-messbar. Dann ist nach (c) $\pi_j \circ T : X_1 \to \mathbb{R}$ messbar.

Umkehrung: Seien $\pi_j \circ T : X_1 \to \mathbb{R}$ Borel-messbar für $j = 1, \ldots, n$ und

$$B := (\alpha_1, \beta_1] \times (\alpha_2, \beta_2] \times \ldots \times (\alpha_n, \beta_n]$$

ein Intervall in $\mathbb{R}^n$. Dann ist B darstellbar wie folgt:

$$B = \bigcup_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}((\alpha_j, \beta_j]).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} T^{-1}(B) &= T^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \pi_j((\alpha_j, \beta_j])\right) \\ &= \bigcap_{j=1}^{n} T^{-1}\pi_j^{-1}((\alpha_j, \beta_j]) \\ &= \bigcap_{j=1}^{n} (\pi_j \circ T)^{-1}((\alpha_j, \beta_j]) \\ &\in \mathcal{A}_1, \end{aligned}$$

wobe der letzte Schritt aus der Messbarkeit von $\pi_j \circ T$ und dem, dass $\mathcal{A}_1$ eine σ-Algebra ist, folgt. Da Intervalle $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen, folgt die Behauptung nach (a).

(e) folgt sofort aus (a).

$\square$

Beispiel 5.3 Sei A eine Menge.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt die charakteristische Funktion der Menge A.

Betrachte $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, wobei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum ist. Der zugehörige messbare Raum für die Bildmenge ist $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Wir behaupten: Genau dann ist χ_A messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$ liegt.

Um dies nachzuweisen untersuchen wir das Urbild von beliebigem Intervall $(-\infty, r], r \in \mathbb{R}$.

$$\chi_A^{-1}((-\infty, r]) = \begin{cases} X & r \geq 1 \\ A^c & 0 \leq r < 1 \\ \emptyset & r < 0 \end{cases}.$$

Für "$\Rightarrow$" sei also χ_A messbar. Dann ist $\chi_A^{-1}((-\infty, r]) \in \mathcal{A}$ für alle r. Insbesondere ist also $A^c \in \mathcal{A}$. Damit auch $A \in \mathcal{A}$.

Für "$\Leftarrow$" folgt aus $A \in \mathcal{A}$ auch $A^c \in \mathcal{A}$. $X, \emptyset \in \mathcal{A}$ gilt automatisch. Also ist nach nach Lemma 5.1 (a) die Funktion χ_A messbar.

Beispiel 5.4 Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ zwei messbare Räume und $T : X_1 \to X_2$ mit

$$Tx \equiv c \in X_2.$$

Sei $B \in \mathcal{A}_2$. Dann ist

$$T^{-1}(B) = \begin{cases} X_1 & \text{falls } c \in B, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist T $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar.

Beispiel 5.5 Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Translation, also

$$Tx := x - x_0.$$

Es ist $T^{-1}(A) = x_0 + A$. T ist messbar, da T stetig ist.

Beispiel 5.6 Sei $f : X \to R^n$ messbar. Dann ist $\|f\|_{l^p} : X \to \mathbb{R}$ messbar, da $\|\cdot\|_{l^p} : X \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Satz 5.2 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt

(i) $f + g$

(ii) fg

(iii) $\max\{f, g\}$

(iv) $\min\{f, g\}$

(v) $f^{\pm} := \max\{\pm f, 0\}$

(vi) $|f|$

(vii) αf

(viii) $\frac{1}{f}$ für $f \neq 0$

sind messbar.
Insbesondere ist

$$M := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ messbar}\}$$

ein Vektorraum.

Beweis. Verwende Lemma 5.1. Genau dann ist $T : X \to \mathbb{R}^n$ messbar, wenn $\pi_j \circ T : X \to \mathbb{R}$ messbar ist für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Sei jetzt T wie folgt erklärt:

$$Tx := (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2.$$

Da f, g messbar sind, ist auch T messbar (genauer $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar), denn

$$(\pi_1 \circ T)(x) = f(x)$$
$$(\pi_2 \circ T)(x) = g(x).$$

Auf diesen Fall lassen sich alle obigen Regeln zurückführen. Zum Beispiel bei (i) ist $f + g = S \circ T$, wobei $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1 + x_2$ stetig ist, sodass $S \circ T$ messbar ist. $\square$

Von nun an benutze folgende Konvention:

- $\{x \in X : f(x) \leq r\} =: \{f \leq r\}$
- $\{x \in X : f(x) \in B\} =: \{f \in B\}$
- $\{x \in X : f(x) = g(x)\} =: \{f = g\}$

Wir betrachten nun die erweiterte reelle Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Es ist

$$\mathcal{B}_0(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \cup E : A \subseteq \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}), E \subset \{-\infty, \infty\}\}$$

Man zeige: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$. Ein erzeugender System $\mathcal{E}$ von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist zum Beispiel:

$$\mathcal{E} := \{[-\infty, r] : r \in \mathbb{R}\}\,.$$

Lemma 5.3 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f^{-1}([-\infty, r]) = \{-\infty \leq f \leq r\} \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Nach 5.1a) ist f genau dann $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{E}$, wobei $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{E})$. □

Folgende Rechenregeln seien in $\overline{\mathbb{R}}$ festgehalten:

- $a \pm \infty := \pm\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$,
- $\pm\infty \pm \infty := \pm\infty$,
- $a - (\pm\infty) := \mp\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$,
- $a \cdot (\pm\infty) := \pm\infty$ für alle $0 \leq a \leq \infty$,
- $0 \cdot (\pm\infty) := 0$!!

Nicht definiert ist $\infty - \infty$. Deswegen ist $a + b = a + c$ äquivalent zu $b = c$ nur, falls $a \neq \pm\infty$.

Satz 5.4 Sei $(f_n)_n$ eine Folge, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle n (hierbei sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum). Dann sind folgende punktweise erklärten Funktionen ebenfalls messbar:

- $\sup f_n$,
- $\inf f_n$,
- $\limsup f_n$,
- $\liminf f_n$,
- $\lim f_n$, falls der Grenzwert existiert.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $s := \sup f_n$ messbar ist, alles andere lässt sich daraus ableiten (z.B. $\inf_n f : n = -\sup_n(-f_n))$, $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k$).
Sei also $s(x) = \sup_n f_n(x)$. Es ist

$$\begin{aligned} s^{-1}([-\infty, r]) &= \{-\infty \leq s \leq r\} \\ &= \bigcap_n \underbrace{\{-\infty \leq f_n \leq r\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Damit ist $s = \sup_n f_n$ messbar nach Lemma 5.1 (a). □

Definition 5.7 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Treppenfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist eine messbare Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt, d.h. $f(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Beispiel 5.8 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{3}{2} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} f &= \chi_{(0,1]} + \frac{3}{2}\chi_{(1,2]} + \frac{1}{2}\chi_{(2,3]} \\ &= \chi_{(0,2]} + \frac{1}{2}\chi_{(1,3]}, \end{aligned}$$

d.h. die Dasrtellung einer Treppenfunktion ist nicht eindeutig.

Korollar 5.5 Jede Treppenfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ lässt sich in der Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

darstellen, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die verschiedenen Werte von f sind und

$$A_i = \{f = \alpha_i\} \in \mathcal{A},$$

wobei $(A_i)_i$ paarweise disjunkte Mengen sind mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X.$$

Diese Darstellung nennen wir kanonische Darstellung von f.

Wir werden Treppenfunktionen vor allem für die Approximation von messbaren Funktionen benutzen. Die Definition eines Integrals ist besonders einfach für Treppenfunktionen. Für messbare Funktionen wird dann das Integral mit Hilfe der Approximation durch Treppenfunktionen definiert.

Satz 5.6 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(a) Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_n$ von Treppenfunktionen mit der Eigenschaft

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$$

und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

(b) Jede messbare Funktion f ist punktweiser Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen.

(c) Ist f eine beschränkte messbare Funktion, dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Folge von Treppenfunktionen, die gegen f konvergiert.

Beweis. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig fest. Wir zerlegen das Intervall $[0, n)$ in Teilintervalle der Länge $\frac{1}{2^n}$:

$$[0, n) = \cup_{i=0}^{n2^n-1} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)$$

Bilde folgende Mengen:

$$\begin{aligned} A_i^n &:= f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right) \qquad 0 \leq i < n2^n - 1, \\ B^n &:= f^{-1}\left([n, \infty]\right). \end{aligned}$$

Definiere nun folgende Treppenfunktion

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i}{2^n} & x \in A_i^n \\ n & x \in B^n. \end{cases}$$

Dann lässt sich f_n darstellen als

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \chi_{A_i^n}(x) + n\chi_{B^n}(x).$$

Damit ist $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ und

$$f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \text{ für alle } x \in \cup_i A_i^n = f^{-1}\left([0, n)\right).$$

Daraus folgt:
Falls $x \in X$ mit $f(x) < \infty$, ist $f_n(x) \to f(x)$. Falls $x \in X$ mit $f(x) = \infty$, so ist $f_n(x) \to \infty$. Falls $f(x) \leq m$ für alle x, so ist für alle $n > m$ und alle $x \in X$:

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

Also konvergiert f_n gleichmäßig.

Nun zeigen wir die Monotonie. Es ist

$$\begin{aligned} A_i^n &= \left\{\frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n}\right\} \\ &= \left\{\frac{2i}{2^{n+1}} \leq f < \frac{2i+1}{2^{n+1}}\right\} \cup \left\{\frac{2i+1}{2^{n+1}} \leq f < \frac{2i+2}{2^{n+1}}\right\}. \end{aligned}$$

Damit ist $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in A_i^n$ und auch alle $x \in \cup_{i=0}^{n2^2-1} A_i^n$. Offenbar gilt auch $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in B^n$.

(b) Es ist $f = f^+ - f^-$. Dann folgt die Behauptung mit (a).

(c) Folgt aus (a) und (b).

$\square$

6 Integrierbare Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, d.h. $(X, \mathcal{A})$ ist ein messbarer Raum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß. Unser Ziel ist die Konstruktion einer Integrationstheorie für messbare Funktionen.

Definition 6.1 (μ-Integral für nichtnegative Treppenfunktionen) Sei $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ eine nichtnegative Treppenfunktion auf $(X, \mathcal{A}, \mu)$, d.h. $\alpha_j \geq 0, A_j \in \mathcal{A}$ für alle j.

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

heißt das $\underline{\mu\text{-Integral von } g \text{ über } X.}$ (wobei die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ zu beachten ist)

Für $E \in \mathcal{A}$ ist

$$\int_E g \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E)$$

das $\underline{\mu\text{-Integral von } g \text{ über } E.}$

Bemerkung 6.2 Für zwei Darstellungen

$$g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^m \beta_k \chi_{B_k}$$

mit $A_j, B_k \in \mathcal{A}$ für alle j, k gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k),$$

siehe Lemma IV.1.1 in [1].

Deswegen ist die Definition von $\int_X g \, \mathrm{d}\mu$ und $\int_E g \, \mathrm{d}\mu$ für eine für nichtegative Treppenfunktion g unabhängig von der Darstellung von g.

Lemma 6.1 Seien g und h nichtnegative Treppenfunktionen auf $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $E \in \mathcal{A}$. Dann gilt

(a) $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty], E \mapsto \int_E g \, \mathrm{d}\mu$ definiert ein Maß auf $\mathcal{A}$.

(b) $\int_E g \, \mathrm{d}\mu + \int_E h \, \mathrm{d}\mu = \int_E (g + h) \, \mathrm{d}\mu$

(c) Aus $h \geq g$ folgt $\int_E h \, \mathrm{d}\mu \geq \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.

(d) Sei $\alpha \geq 0$. Dann ist

$$\int_E (\alpha g) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir können voraussetzen, dass $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ und $h = \sum_{k=1}^m \beta_k \chi_{B_k}$ in ihren kanonischen Darstellung sind, d.h. $(A_j)_j$ und $(B_k)_k$ sind paarweise disjunkt.

(a) Es ist $\nu(\emptyset) = 0$. Als nächstes zeigen wir die σ-Additivität. Sei $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $(E_k)_k$ paarweise disjunkt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \int_E g \, \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap E) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu \left(A_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_j \cap E_k \right)}_{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j \mu(A_j \cap E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap E_k)}_{= \int_{E_k} g \, \mathrm{d}\mu} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)
\end{aligned}$$

(b) O.b.d.A. sei $\cup_{j=1}^{n} A_j = X, \cup_{k=1}^{m} B_k = X$. Sonst definiert man, z.B., g als Null auf $X \setminus \cup_{j=1}^{n} A_j =: A_{n+1}$ und erhält $g = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_{n+1} = 0$ und $\cup_{j=1}^{n+1} A_j = X$.
Sei $E_{jk} := A_j \cap B_k \cap E$. Dann ist

$$\int_{E_{jk}} g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_{jk}) = \alpha_j \mu(E_{jk}),$$

weil $A_i \cap E_{jk} \neq \emptyset$ nur für $i = j$. Analog

$$\int_{E_{jk}} h \, \mathrm{d}\mu = \beta_k \mu(E_{jk}).$$

Nun ist

$$\int_{E_{jk}} (g + h) \, \mathrm{d}\mu = (\alpha_j + \beta_k) \mu(E_{jk}).$$

Es ist $\bigcup_{j,k} E_{jk} = E$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\int_E (g+h)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\bigcup_{j,k} E_{jk}} (g+h)\,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \sum_{j,k} \int_{E_{jk}} (g+h)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k)\mu(E_{jk}) \\
&= \sum_{j,k} (\alpha_j \mu(E_{jk}) + \beta_k \mu(E_{jk})) \\
&= \sum_{j,k} \int_{E_{jk}} g\,\mathrm{d}\mu + \sum_{j,k} \int_{E_{jk}} h\,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \int_E g\,\mathrm{d}\mu + \int_E h\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_E h\,\mathrm{d}\mu &= \int_E ((h-g)+g)\ \mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \underbrace{\int_E (h-g)\,\mathrm{d}\mu}_{\geq 0} + \int_E g\,\mathrm{d}\mu \\
&\geq \int_E g\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

(d) ist klar.

$\square$

Definition 6.3 (μ-Integral von nichtnegativen messbaren Funktionen) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion uund $E \in \mathcal{A}$. Dann heißt

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_E g\,\mathrm{d}\mu : g \text{ nichtnegative Treppenfunktionen}, 0 \leq g \leq f \right\} \in [0, \infty]$$

Integral von f über E bezüglich des Maßes μ.

Hinweis 6.4 Ist speziell f eine nichtnegative messbare Treppenfunktion, dann stimmt das Integral aus Definition 6.3 mit dem Integral aus Definition 6.1 überein.

Lemma 6.2 Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $E, F \in \mathcal{A}$.

(a) Ist $0 \leq f|_E \leq g|_E$, so ist $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.

(b) Ist $E \subset F$, so ist $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_F f\,\mathrm{d}\mu$.

(c) Ist $f|_E = 0$, so ist $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$.

(d) Ist $\mu(E) = 0$, so ist $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$. (auch für $f|_E = \infty$)

Beweis. Wir zeigen die Aussagen erst für nichtnegative Treppenfunktionen und dann gehen wir zum Supremum rüber.

(a) Seien f, g nichtnegative Treppenfunktionen mit

$$0 \leq f|_E \leq g|_E.$$

Sei $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$ und $g = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{B_k}$ (mit $E \subset \cup_j A_j, E \subset \cup_k B_k$). Dann ist

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=1}^{m} \chi_{A_j \cap B_k} \\ g &= \sum_{k=1}^{m} \beta_k \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j \cap B_k}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_E f \, \mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k \cap E) \\ \int_E g \, \mathrm{d}\mu &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_k \mu(A_j \cap B_k \cap E) \end{aligned}$$

Falls $A_j \cap B_k \cap E \neq \emptyset$, ist $\alpha_j \leq \beta_k$. Damit ist

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Rest: Übung!

□

Lemma 6.3 Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0 \iff \mu(\{f > 0\}) = 0.$$

Beweis. Setze $A := \{f > 0\}$ und $A_n := \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$. Dann ist

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

und $f \geq \frac{1}{n} \chi_{A_n}$.
Sei erst $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Dann ist

$$0 \leq \int_X \frac{1}{n} \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\int_X \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = 0$. Damit ist $\mu(A_n) = 0$ für alle n. Damit ist

$$\mu(A) = 0.$$

Sei nun $\mu(A) = 0$. Es ist $f \leq \infty \cdot \chi_A$ und deshalb

$$\int_X \infty \cdot \chi_A \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Da die linke Seite gleich $\infty \cdot \mu(A) = 0$, gilt $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$. □

Satz 6.4 (Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo Levi)) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to [0, \infty]$ und $f_n : X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots.$$

Weiterhin sei

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Dann gilt für alle $E \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Es ist $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ für alle n. Also ist

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

und $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu$. Beachte, dass der Limes (in $[0, \infty]$) existiert wegen der Monotonie der Folge.

Es bleibt zu zeigen $\geq$ im Satz. Es gilt wegen der Monotonie $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. Es genügt folgendes zu zeigen. Ist g eine Treppenfunktion mit $0 \leq g \leq \underbrace{f}_{=\sup_n f_n}$, so ist

$$\int_E g \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_n f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Dann gilt dies auch für das Supremum über solche Funktionen g, also gilt dann $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_n f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Sei $c \in (0, 1)$ beliebig und $E_n := \{x \in E : f_n(x) \geq cg(x)\}$. Es ist

$$E_n \subset E_{n+1}, \quad \bigcup_n E_n = E,$$

wobei die zweite Relation wegen $f \geq g$ gilt. Damit ist

$$\sup_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} cg \,\mathrm{d}\mu = c \int_{E_n} g \,\mathrm{d}\mu$$

für alle n mit $c \in (0, 1)$ beliebig. Damit ist auch

$$\sup_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} g \,\mathrm{d}\mu \text{ für alle } n.$$

Bereits gezeigt ist, dass $\nu : E \mapsto \int_E g \,\mathrm{d}\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist. Also ist wegen der Stetigkeit von unten

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = \nu(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

$$\implies \sup_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Lemma 6.5 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to [0, \infty]$ messbar und $E \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Sei erst g eine beliebige Treppenfunktion mit $g \geq 0$, d.h. $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \geq 0, A_i \in \mathcal{A}$ für alle i. Damit ist

$$\int_E g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_X \underbrace{g \cdot \chi_E}_{=\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \cdot \chi_E} \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap E} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E). \end{aligned}$$

Also ist $\int_E g \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \cdot \chi_E \,\mathrm{d}\mu$.

Sei nun $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es nichtnegative Treppenfunktionen $g_1 < g_2 < \ldots$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n = f$. Nach Anwendung des vorigen und des Satzes von B. Levi, ist dann

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \chi_E \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Lemma 6.6 Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $\alpha \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\int_X (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$$

$$\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Übung! □

Korollar 6.7 Sei $(g_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $g_n \geq 0$ für alle n. Weiterhin sei

$$g := \sum_{k=1}^\infty g_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n g_k.$$

Dann ist $g : X \to [0, \infty]$ ebenfalls messbar und es gilt für jedes $E \in \mathcal{A}$:

$$\int_E g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Definition 6.5 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann heißt f integrierbar (oder μ-integrierbar), wenn $f^+ = \max\{f, 0\}$ und $f^- = \max\{-f, 0\}$ endliche Integrale besitzen. Man erklärt dann

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Für $E \in \mathcal{A}$ ist

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f\chi_E \,\mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 6.6 (i) Ist $f \geq 0$ messbar, dann ist zunächst $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ stets definiert, aber f ist integrierbar nur falls $\int_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

(ii) Für $f : X \to [-\infty, \infty]$ ist $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ definiert nur falls f integrierbar (s0nst ist $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu = \infty$ möglich und $\infty - \infty$ ist nicht definiert).

1. $f : X \to [-\infty, \infty]$ ist genau dann integrierbar, wenn f messbar und $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

(iv) Notationen:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f dx\mu(x) = \int_X f\mu(\mathrm{d}\, x).$$

Ist $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, so bezeichne

$$\int_E f \,\mathrm{d}\,\lambda = \int_E f \,\mathrm{d}\, x.$$

Satz 6.8 Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dann gelten

(a) $\alpha f + \beta g$ (falls definiert) ist integrierbar und es gilt:

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Es ist

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

(c) Ist $f \geq 0$, so ist $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$.

Beachte in (a), dass $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für alle $x \in X$ definiert werden muss, also darf nicht $\alpha f(x) = -\beta g(x)$ und $|\alpha f(x)| = \infty$.

Beweis. (a) Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann ist $\alpha f + \beta g$ messbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_X |\alpha f + \beta g| \,\mathrm{d}\mu &\leq \int_X (|\alpha f| + |\beta g|) \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu + \int_| \beta g| \,\mathrm{d}\mu \\
&= |\alpha| \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu + |\beta| \int_| g| \,\mathrm{d}\mu < \infty
\end{aligned}$$

Also ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar. Nun zeigen wir die Linearität. Dies wird in zwei Schritten gezeigt:

(i) Zu zeigen: $\int_X (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.
Es ist $f = f^+ - f^-$ und $g = g^+ - g^-$. Also ist

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f + g)^+ - (f + g)^-.$$

Dies ist äquivalent zu

$$f^+ + g^+ - (f^- + g^-) = (f + g)^+ - (f + g)^-.$$

Jetzt möchten wir zeigen, dass dies auch zu

$$f^+ + g^+ + (f+g)^- = (f+g)^+ + f^- + g^- \tag{(*)}$$

äquivalent ist. Bei dieser Umformung müssen wir aber wegen dem möglichen Auftreten von $\infty - \infty$ aufpassen. Wir haben drei Fälle:

1) $(f+g)^+(x), (f+g)^-(x) \neq \infty$
   Dann ist auch $f^+(x) + g^+(x) \neq \infty$ und $f^-(x) + g^-(x) \neq \infty$ und es handelt sich um eine Rechnung in $\mathbb{R}$.
2) $(f+g)^+(x) = \infty$ (dann offenbar $(f+g)^-(x) = 0$)
   Es folgt $f^+(x) + g^+(x) = \infty$ und $f^-(x) + g^-(x) \neq \infty$. Das Addieren von $(f+g)^-(x)$ und $f^-(x) + g^-(x)$ ist also erlaubt.
3) $(f+g)^-(x) = \infty$ ist anlog zu (b).

Die linke und rechte Seiten in (*) sind nichtnegative messbare Funktionen. Also

$$\int_X (f^+ + g^+ + (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^+ + f^- + g^- \,\mathrm{d}\mu$$

Dies können wir nun auseinanderziehen:

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Alle Integrale sind endlich (teilweise wegen der Integrierbarkeit von $f+g$). Durch Umstellen folgt nun

$$\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

(ii) $\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \in_X f \,\mathrm{d}\mu$:
Sei zunächst $\alpha \geq 0$. Dann ist

$$\alpha f = \alpha f^+ - \alpha f^-.$$

Wie in (i) folgt dann

$$\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Bleibt zu zeigen, dass $\int_X -f \,\mathrm{d}\mu = -\int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

$$-f = -(f^+ - f^-) \;\Rightarrow\; -(f)^* = f^-, (-f)^- = f^+$$

Damit:

$$\int_X -f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu = -\int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Übung!

(c) Übung!

□

Korollar 6.9 Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Dann ist

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{E_2} f \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\int_{E_1 \cup E_2} f \, \mathrm{d}\mu &= \int_X f \cdot \chi_{E_1 \cup E_2} \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X f(\chi_{E_1} + \chi_{E_2}) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_{E_1} + f\chi_{E_2} \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X f\chi_{E_1} \, \mathrm{d}\mu + \int_X f\chi_{E_2} \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{E_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} f \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

Lemma 6.10 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ messbar. $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\nu(E) := \int_E g \, \mathrm{d}\mu$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Beweis. Für $g \geq 0$ Treppenfunktion ist die Aussage bereits bewiesen.
Sei $g \geq 0$ nun beliebig messbar. Zu zeigen: ν ist σ-additiv.
Sei $(E_j)_j$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente aus $\mathcal{A}$ mit

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Dann ist

$$\chi_E = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}$$

Also ist

$$\nu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\mu = \int_X g\chi_E \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} g\chi_{E_j} \right) \mathrm{d}\mu$$

Anwendung des Satzes über die monotone konvergenz liefert:

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X g\chi_{E_j} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

□

Wir nennen das Maß ν aus diesem Lemma das von g erzeugte Maß. Die Frage ist: Was ist das Integral bezüglich des Maßes ν?

Satz 6.11 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$. Sei ν das von g erzeugte Maß. Sei $f : X \to \overline{R}$ messbar. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann ν-integrierbar, wenn $\int_X |f| g \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Es gilt dann

$$\int_X f \, \mathrm{d}\,\nu = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu..$$

Beweis. Sei nun $f \geq 0$ eine Treppenfunktion $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$, $\alpha_j \geq 0,\ E_j \in \mathcal{A}$ für alle j. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_X f \,\mathrm{d}\,\nu &= \int_X \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j} \right) \mathrm{d}\,\nu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\int_X \chi_{E_j} \,\mathrm{d}\,\nu}_{=\nu(E_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\nu(E_j)}_{=\int_{E_j} g \,\mathrm{d}\mu} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{E_j} g \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_X g \chi_{E_j} \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j} \right) g \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Sei nun $f \geq 0$ messbar. Dann existiert eine Folge $(f_n)_n$ von Treppenfunktionen $f_n \geq 0, f_{n+1} \geq f_n$. Es ist

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\,\nu = \int_X f_n g \,\mathrm{d}\mu.$$

Mittels Satz von Beppo Levi gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\,\nu = \int_X f \,\mathrm{d}\,\nu$$

und damit

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n g \,\mathrm{d}\mu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Also

$$\int_X f \,\mathrm{d}\,\nu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Sei nun $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist $f = f^+ - f^-$. Nach den vorigen Betrachtungen gilt:

$$\begin{aligned}
\int_X f^+ \,\mathrm{d}\,\nu &= \int_X f^+ g \,\mathrm{d}\mu \\
\int_X f^- \,\mathrm{d}\,\nu &= \int_X f^- g \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

f ist ν-integrierbar, falls f^+ und f^- ν-integrierbar sind. Damit ist $f^+g,\ f^-g$ μ-integrierbar. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_X f \,\mathrm{d}\,\nu &= \int_X f^+ \,\mathrm{d}\,\nu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\,\nu = \int_X f^+ g \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- g \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X (f^+ - f^-) g \,\mathrm{d}\mu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 6.7 Sei $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu = \text{Zählmaß})$. Also

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (also eine Folge). Zunächst ist f eine $P(\mathbb{N})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion. Was ist $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$?

Sei erst $f \geq 0$. Mit den Treppenfunktionen $f_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)\chi_{\{k\}}$ wird f approximiert, es gilt $f_n \nearrow f$. Die Folge der f_n ist monoton. Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} f(k)\chi_{\{k\}} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\} = \sum_{k=1}^{n} f(k).\end{aligned}$$

Da die Folge monoton ist, können wir Beppo Levi anwenden. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Also ist

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Also ist $f \geq 0$ genau dann μ-integrierbar, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$.

Dieses Verfahren kann analog zu den vorigen Beweisen auf beliebige Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, indem man $f = f^+ - f^-$ mit $f^\pm \geq 0$ schreibt. f ist genau dann μ-integrierbar, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f^+(k) < \infty$, und $\sum_{k=1}^{\infty} f^-(k) < \infty$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty$.

Beispiel 6.8 Sei $(X, \mathcal{A}, \delta_x)$ ein Maßraum, δ_x das Dirac-Maß. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Frage: was ist $\int_X f \,\mathrm{d}\,\delta_x$?

Sei erst $f \geq 0$ messbar. Wir wählen wieder eine approximierende monotone Folge von Treppenfunktionen $(f_n)_n$ mit $f_n \nearrow f$, $f_n = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_j^{(n)} \chi_{E_j^{(n)}}$.

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\delta_x = \int_X \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_j^{(n)} \chi_{E_j^{(n)}} \,\mathrm{d}\delta_x = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_j^{(n)} \delta_x(E_j^{(n)}) = \alpha_i^{(n)} = f(x),$$

wobei $x \in E_i^{(n)}$. Durch die Anwendung vom Satz von B. Levi ist

$$\int_X f \,\mathrm{d}\delta_x = \lim_n f_n(x) = f(x).$$

Analog zu obigen Beweisen ist schlussendlich für beliebige $f : X \to \mathbb{R}$ messbar:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\,\delta_x = f(x).$$

6.1 Fast überall bestehende Eigenschaften

Erinnerung: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$, dann heißt jede Teilmenge von N eine Nullmenge (μ-Nullmenge).

Man beachte, dass eine Nullmenge nicht notwendig zu $\mathcal{A}$ gehören muss. Im Falle, dass das Maß vollständig ist, ist jedoch jede Teilmenge einer Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ wieder ein Element von $\mathcal{A}$.

Definition 6.9 Sei (E) eine Eigenschaft, die $x \in X$ besitzen kann.
Die Eigenschaft (E) besteht fast überall oder μ-fast überall, wenn die Menge

$$\{x \in X : x \text{ hat nicht } (E)\}$$

eine Nullmenge ist, d.h. es existiert ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und aus $x \notin N$ folgt x hat die Eigenschaft (E).

Beispiel 6.10 (1) Betrachte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Es gilt: $\mathbb{R}$ ist fast überall irrational, weil $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ und für alle $x \notin \mathbb{Q}$ ist x irrational.

(2) Betrachte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$.
Bezüglich des δ_0-Maßes ist fast überall $x = 0$, denn

$$\delta(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0.$$

(3) Seien $f, g : X \to Y$ mit einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Es ist $f = g$ fast überall, falls $f|_{M^c} = g|_{M^c}$ für eine Nullmenge M.

Lemma 6.12 Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Es ist μ-fast überall $|f| < \infty$.

(b) Ist $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$, so ist μ-fast überall $f = 0$.

(c) Ist $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und μ-fast überall $f = g$, so ist g μ-integrierbar und es ist

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. (a) Es gilt

$$\infty \cdot \chi_{\{|f|=\infty\}} \leq |f|.$$

Da $\{|f| = \infty\} \in \mathcal{A}$ (f messbar), ist links eine Treppenfunktion. Also ist $\int_X \infty \cdot \chi_{\{|f|=\infty\}} \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(\{|f| = \infty\})$. Damit ist

$$\infty \cdot \mu(\{|f| = \infty\}) \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Also ist $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$.

(b) Definiere $E_n := \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu &\geq \int_X |f| \chi_{E_n} \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_n} |f| \, \mathrm{d}\mu \\ &\geq \frac{1}{n} \mu(E_n). \end{aligned}$$

Also ist $\mu(E_n) = 0$ für alle n. Mit der Stetigkeit von unten ist wegen $E_n \nearrow \{|f| > 0\}$ dann

$$\mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

(c) Sei $S := \{f \neq g\} (\in \mathcal{A})$. Nach Voraussetzung ist $\mu(S) = 0$.

Wir definieren $h : X \to \overline{\mathbb{R}}, h(x) := f(x) = g(x)$, falls $x \in X \setminus S$, $h(x) := 0$ für $x \in S$. Sei noch $f_1 := f\chi_S, g_1 := g\chi_S$. Nach (ii) ist $\int_X |f_1| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |g_1| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Wegen $f = h + f_1, g = h + g_1$ und $\operatorname{supp}|h| \cap \operatorname{supp}|f_1| = \emptyset = \operatorname{supp}|h| \cap \operatorname{supp}|g_1|$ ist

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |h| \,\mathrm{d}\mu + \int_X |f_1| \,\mathrm{d}\mu, \quad \int_X |g| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |h| \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g_1| \,\mathrm{d}\mu.$$

Also ist f genau dann integrierbar, wenn h integrierbar ist, genau dann, wenn g integrierbar ist. Außerdem

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X h + f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X h \,\mathrm{d}\mu + \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X h \,\mathrm{d}\mu = \int_X h \,\mathrm{d}\mu + \int_X g_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X h + g_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Lemma 6.13 Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, g $\mu-$integrierbar und $|f| \leq g$ μ-fast überall. Dann ist f integrierbar und $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

7 Konvergenzsätze

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz 7.1 (Lemma von Fatou) Seien $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\int_X \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Es ist

$$\liminf_n f_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} f_k = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$$

Setze

$$g_n := \inf_{k \geq n} f_k.$$

g_n konvergiert monoton wachsend gegen $\liminf_k f_k$. Die Anwendung von Satz 6.4 liefert:

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_k f_k \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n \to \infty} \int_X g_n \,\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Aus $\inf_{k \geq n} f_k \leq f_n$ folgt:

$$\int_X \inf_{k \geq n} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_k f_k \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n \to \infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_n \int_X \inf_{k \geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

□

Satz 7.2 (Lebesguescher Konvergenzsatz oder Satz von der majorisierenden Konvergenz) Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen und für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu-\text{f.ü.}.$$

Falls es eine integrierbare Funktion g gibt mit

$$|f_n| \leq g \quad \mu-\text{f.ü. für alle } n,$$

dann sind f_n, f integrierbar und

$$\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Deshalb gilt auch $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. 1) Da f_n messbar sind, ist auch f messbar. Da $|f_n| \leq g$ f.ü. ist, ist

$$\int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

Also sind die f_n integrierbar. Genauso gilt $|f| \leq g$ f.ü., also ist f integrierbar.

2) O.B.d.A. können wir voraussetzen, dass $f_n \to f$ überall auf X gilt. Sonst gibt es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{4}$$

für alle $x \in N^c$. Man definiert $\widetilde{f} := f\chi_{N^c}, \widetilde{f_n} := f_n\chi_{N^c}$. Dann gilt (4) für $\widetilde{f_n}$ und $\widetilde{f}$ überall auf X und aus $\int_X |\widetilde{f_n} - \widetilde{f}| \,\mathrm{d}\mu \to 0$ und $\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |\widetilde{f_n} - \widetilde{f}| \,\mathrm{d}\mu$ folgt $\int_X |f_n f| \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

3) Sei $g_n := |f| + g - |f_n - f|$. Es folgt mit Hilfe des Lemmas von Fatou

$$\int_X |f| + g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_n g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_X g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| + g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_n \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Daraus erhalten wir $\limsup_n \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \leq 0$, also $\limsup_n \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Da der $\liminf$ automatisch nichtnegativ ist, gilt $\lim_n \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Für die letzte Aussage:

$$\left|\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f) \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

□

Beispiel 7.1 (1) Sei $X = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0,1], \mu = \lambda$ und $f_n(x) := x^n$.
Offenbar ist $|f_n| \leq 1$ für alle n und $f_n \to 0$ f.ü..

(2) Sei $X = [0,\infty), \mu = \lambda, f_n(x) = ne^{-nx}$. Es gilt $f_n > 0, f_n \to 0$ f.ü. und nach Fatou $\int_{[0,\infty)} \liminf f_n \,\mathrm{d}\lambda \leq \liminf \int_{[0,\infty)} f_n \,\mathrm{d}\lambda$. Hier gilt sogar $<$, weil die linke Seite gleich $\int_{[0,\infty)} 0 \,\mathrm{d}\lambda = 0$ und die rechte Seite gleich $\liminf \int_0^\infty ne^{-nx} \,\mathrm{d}x = \liminf 1 = 1$ sind. Für die rechte Seite wurde die Übereinstimmung des Riemann-Integrals (für das wir, z.B. mit dem Fundamentalsatz der Analysis, den Wert des Integrals ausrechnen können) mit dem Lebesgue-Integral benutzt.

(3) $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = P(\mathbb{N}), \mu =$ Zählmaß. Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f_n(j) := a_j^{(n)}$ mit $a_j^{(n)} \to a_j, |a_j^{(n)}| \leq g_j$ für alle $j, n \in \mathbb{N}$, wobei $(g_j)_j$ eine l^1-summierbare Folge ist. Dann folgt nach Satz 7.2

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} \to \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Also die Summe und der Limes können in diesem Fall vertauscht werden.

(4) Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}), \lambda)$ und $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$.
Hier ist $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = n\frac{1}{n} = 1$ für alle n, aber $f_n \to 0$ überall auf $\mathbb{R}$. Aus Satz 7.2 folgt dann dass $(f_n)_n$ keine integrierbare Majorante hat.

Anwendungen der majorisierten Konvergenz

Lemma 7.3 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$ und sei $f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

1. Für alle $t \in (a, b)$ ist $x \mapsto f(x, t)$ messbar.
2. Für fast alle $x \in X$ ist $t \mapsto f(x, t)$ stetig in t_0.
3. Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$, sodass für alle $t \in (a, b)$

$$|f(\cdot, t)| \leq h \quad \lambda-\text{f.ü.}.$$

Dann ist $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) = \int_X f(t, x) \, d\, \mu(x)$$

eine stetige Funktion in t_0.

Beweis. Sei $(t_n) \subset (a, b)$ eine beliebige Folge mit $t_n \to t_0$. Setze $g_n(x) := f(x, t_n)$. Diese ist messbar für alle n. Setze weiterhin

$$g(x) = f(x, t_0).$$

Wegen (ii) ist $g_n(x) \to g(x)$ $(n \to \infty)$ für fast alle x.

Wegen (iii) und Satz 7.2 ist nun auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Das heisst

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t_0).$$

□

Lemma 7.4 Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und sei $f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $t \in (a, b)$ ist $x \mapsto f(x, t)$ messbar

(b) Für fast alle $x \in X$ ist $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar auf (a, b).

(c) Es existiert eine μ-integrierbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\left|\frac{\mathrm{d}\, f(x,t)}{\mathrm{d}t}\right| \leq h(x)$$

für fast alle $x \in X$.

Dann ist die Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(t) := \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$$

eine differenzierbare Funktion auf und es gilt für alle $t \in (a,b)$

$$\frac{\mathrm{d}\,F(t)}{\mathrm{d}\,t} = \int_X \frac{\mathrm{d}\,f(x,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $t_0 \in (a,b)$ beliebig fest. Sei $(t_n) \subset (a,b)$ beliebig mit $t_n \neq t_0$ und $t_n \to t_0$. Setze

$$g_n(x) := \frac{f(x,t_n) - (x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

Es sind g_n messbar. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}(x,t_0) =: g(x)$$

für alle $x \in X \setminus N$ mit einer Nullmenge N. Zu zeigen ist, dass $|g_n|$ eine integrierbare Majorante hat. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $z_n(x)$ zwischen t_0 und t_n, mit

$$f(x,t_n) - f(x,t_0) = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}(x, z_n(x))(t_n - t_0).$$

Also ist

$$|g_n(x)| = \left|\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}(x, z_n(x))\right| \leq h(x)$$

für fast alle x. Nach dem Satz von Lebesgue (7.2) gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \frac{\mathrm{d}\,f(x,t_0)}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Die linke Seite ist aber gleich $(dF/dt)(t_0)$. □

Bemerkung 7.2 1. Die Voraussetzung (c) in Lemma 7.3 bzw. 7.4 heißt, dass für alle $t \in (a,b)$ gilt $|f(x,t)| \leq h(x)$ bzw. $|df/dt(x,t)| \leq h(x)$ für alle $x \in X \setminus N_t$ für eine Nullmenge N_t. Es muss aber nicht $\cup_{t\in(a,b)} N_t$ eine Nullmenge sein.

2. Verallgemeinerung: (a,b) in den obigen zwei Lemmata kann durch einen metrischen Raum ersetzt werden.

Riemann und Lebesgue-Integral

Zur Erinnerung bemerken wir, dass das Riemann-Integral (R-Integral) mit Hilfe von Stufenfunktionen definiert wird.

Definition 7.3 Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Stufenfunktion, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine streng monoton wachsende endliche Folge $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ sowie $(c_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = c_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

Stufenfunktionen sind spezielle Treppenfunktionen, da bei Treppenfunktionen die Urbilder der unterschiedlichen Werte allgemeine messbare Mengen sein dürfen (nicht nur Intervalle).

Behauptung: Ist f eine Stufenfunktion, dann ist f Riemann-integrierbar und

$$(R-)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$$

und auch Lebesgue-integrierbar und

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = (R-)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Der Beweis folgt aus den Definitionen der beiden Integrale. Beachte, dass f $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist und dass λ-fast überall $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{(x_{i-1},x_i)}(x)$.

Satz 7.5 Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gibt es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f = g \quad \lambda\text{-fast überall}$$

und

$$(R-)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\lambda.$$

Beweis. Da f R-integrierbar ist, gibt es Folgen $(\varphi_k)_k, (\psi_k)_k$ von Stufenfunktionen mit $\varphi_k \le f \le \psi_k$ und $(R-)\int_a^b \psi_k(x)\,\mathrm{d}x - (R-)\int_a^b \varphi_k\,\mathrm{d}x < 1/k$ für alle $k \ge 1$. O.B.d.A. können wir voraussetzen, dass $(\varphi_k)_k$ monoton wachsend und $(\psi_k)_k$ monoton fallend ist.

Wir wissen aus der R-Integrierbarkeit, dass

$$(R-)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_k (R-)\int_a^b \psi_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_k (R-)\int_a^b \varphi_k\,\mathrm{d}x.$$

Sei $\varphi = \lim_k \varphi_k$. φ ist messbar, da alle φ_k messbar sind. Nach dem Satz von B. Levi ist

$$\int_{[a,b]} \varphi\,\mathrm{d}\lambda = \lim_k \int_{[a,b]} \varphi_k\,\mathrm{d}\lambda.$$

Nach der obigen Behauptung ist aber $\int_{[a,b]} \varphi_k\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi_k\,\mathrm{d}x$ für alle k. Also

$$\lim_k \int_{[a,b]} \varphi_k\,\mathrm{d}\lambda = \lim_k (R-)\int_a^b \varphi_k\,\mathrm{d}x$$

und damit

$$\int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}\lambda = \lim_k (R-) \int_a^b \varphi_k \, \mathrm{d}x.$$

Analog gilt

$$\int_{[a,b]} \psi \, \mathrm{d}\lambda = \lim_k (R-) \int_a^b \psi_k \, \mathrm{d}x.$$

Also

$$\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \varphi = \psi \text{ f.ü. } \Rightarrow f = \varphi = \psi \text{ f.ü.}$$

□

Korollar 7.6 Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ messbar und Riemann integrierbar. Dann ist f λ-integrierbar und

$$(R-) \int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda.$$

Beweis. Nach Satz 7.5 gibt es ein g mit $g = f$ fast überall und g λ-integrierbar. Mit Lemma 6.12(c) ist f λ-integrierbar und

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\,\lambda = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\,\lambda.$$

□

Der wahrscheinlich wichtigste Satz zur Relation zwischen dem Riemann und Lebesge-Integral ist

Satz 7.7 (Lebesgue) Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n, a < b$ ist genau dann R-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen eine λ-Nullmenge ist. Und dann gilt

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = (R-) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\,x.$$

Den Beweis findet man z.B. in [1], Satz IV.6.1.

Auch für das Integral über unbeschränkte Mengen kann man aus R-Integrierbarkeit die λ-Integrierbarkeit folgern. Als Beispiel:

Satz 7.8 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (möglicherweise unbeschränkt) und $f : I \to \mathbb{R}$ R-integrierbar über jedes kompakte Intervall $K \subset I$. Dann ist f genau dann $\lambda-$integrierbar über I, wenn $|f|$ uneigentlich R-integrierbar über I ist. Und dann

$$\int_I f \, \mathrm{d}\lambda = (R-) \int_I f(x) \, \mathrm{d}\,x.$$

Der Beweis bleibt eine Übung.

Satz 7.9 (Egoroff) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $\mu(X) < \infty$ und sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \to 0$ fast überall. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine Menge $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E^c) \leq \varepsilon$ so, dass $f_n \to 0$ gleichmäßig auf E

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$E_{k,m} := \bigcap_{n \geq m} \left\{ |f_n| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Aus $f_n \to 0$ f.ü. folgt $\bigcup_m E_{k,m} = X \backslash N$ für ein N mit $\mu(N) = 0$. Außerdem ist $\lim_{m \to \infty} \mu(E_{k,m}) = \mu(X \backslash N) = \mu(X)$. Also gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein m_δ mit

$$\mu(X) - \mu(E_{k,m_\delta}) < \delta.$$

Sei nun $\delta = \varepsilon 2^{-k}$ speziell gewählt. Dann existiert ein m_k mit

$$\mu(E_{k,m_k}^c) = \mu(X) - \mu(E_{k,m_k}) \leq \varepsilon 2^{-k}. \tag{$*$}$$

Sei nun $E := \bigcap_k E_{k,m_k}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(E^c) &= \mu\left(\left(\bigcap_k E_{k,m_k}\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_k E_{k,m_k}^c\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu\left(E_{k,m_k}^c\right)}_{\leq \varepsilon 2^{-k} \quad (*)}. \end{aligned}$$

Also ist $\mu(E^c) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon$. Nach der Definition von E gilt für jedes k $|f_n| \leq 1/k$, falls $n \geq m_k$. Das heißt $f_n \to 0$ gleichmäßig auf E. □

8 $\mathcal{L}^p$ und L^p-Räume, $1 \leq p < \infty$

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 8.1 Für $1 \leq p < \infty$ ist

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} | f \text{ messbar}, \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

Ist $X \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}$ die Borel-σ-Algebra, $\mu = \lambda$, so schreibt man

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}(X).$$

Spezialfall: $\mathcal{L}^1(\mu)$

Sei $\|f\|_1 := \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$. Dann gelten folgende Eigenschaften

(1) $f = 0 \implies \|f\|_1 = 0$
aber $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$ nur μ-fast überall

(2) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$

(3) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

Aus (1) folgt, dass $\|\cdot\|_1$ keine Norm ist. (2) und (3) stellen sicher, dass $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein linearer Vektorraum ist.

Ziel: Aus $(\mathcal{L}^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ gewinnt man durch Äquivalenzklassenbildung einen normierten Raum, den wir $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ nennen.

Wir führen folgende Äquivalenzrelation ein:

$$f \sim g \iff f = g \ \mu\text{-fast überall}.$$

Die Äquivalenzklassen sind

$$[f] := \left\{g \in \mathcal{L}^1(\mu) : f = g \ \mu\text{-fast überall}\right\}$$

Definition 8.2 Definiere

$$L^1(\mu) := L^1(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{[f] : f \in \mathcal{L}^1(\mu)\right\}.$$

Bemerkung 8.3 Mit

$$\mathcal{N} := [0] = \left\{f \in \mathcal{L}^1(\mu) : f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\right\}$$

ist $L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)/\mathcal{N}$, d.h. ein Quotientenraum.

Lemma 8.1 Der Raum $L^1(\mu)$ mit

$$\|[f]\|_1 := \|f\|_1$$

und mit

$$[f] + [h] := [f + h], \quad \alpha[f] := [\alpha f] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

ist ein normierter Vektorraum.

Beweis. ... $\square$

Definition 8.4 Sei $1 \leq p < \infty$. Dann setze

$$L^p(\mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

wobei $[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(\mu); f = g \ \mu\text{-fast überall}\}$ ist. Definiere

$$\|[f]\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definition 8.5 Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Definiere

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} f(x) := \inf \{a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : f(x) \leq a \ \mu\text{-fast überall}\}$$

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in X} f(x) := \sup \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} : f(x) \geq a \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

Setze weiterhin

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Beispiel 8.6

1. Sei $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist

$$\operatorname{ess\,sup} f(x) = 1 = \operatorname{ess\,inf} f(x).$$

2. $X = (0, 1), f(x) := 1/x$. Dann ist $\operatorname{ess\,sup} f(x) = \sup f(x) = \infty$.

3. $X = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$. Dann ist $\operatorname{ess\,sup} f(x) = 1, \sup f(x) = \infty$.

Definition 8.7

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : X \to \overline{R} \text{ messbar} : \|f\|_\infty < \infty\}$$
$$L^\infty(\mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)\},$$

wobei $[f] = \{g \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : g = f\mu - \text{f.ü.}\}$.

Offenbar ist auch $L^\infty(\mu)$ ein normierter Raum.

Wir haben jetzt gezeigt, dass L^p ein normierter Raum für $p = 1$ oder $p = \infty$. Das nächste Ziel ist dies auch für alle $p \in (1, \infty)$ zu zeigen. Danach zeigen wir, dass L^p sogar ein Banachraum ist.

Lemma 8.2 (Young'sche Ungleichung) Für $a, b \in [0, \infty)$, $a, b \geq 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Beweis. Der Beweis basiert auf der Konvexität der Exponential-Funktion. □

Satz 8.3 (Höldersche Ungleichung) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Dann gilt

$$fg \in L^1(\mu)$$

und

$$\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis. Sei $p = 1$ und $q = \infty$. Dann ist

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty \text{ fast überall.}$$

Also ist

$$|(fg)(x)| \leq |f(x)| \| g(x) \| \text{ fast überall,}$$

woher $fg \in L^1(\mu)$ folgt. Damit ist

$$\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \|g\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Sei also nun $1 < p < \infty$.
Der Trivialfall ist $f = 0$ oder $g = 0$.

Sei also $\|f\|_p \neq 0$ und $\|g\|_q \neq 0$. Dann ist mit Lemma 8.2

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Also ist $|fg| \in L^1(\mu)$ und

$$\int \frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} \int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \int \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{g} = 1.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 8.4 (Minkowskische Ungleichung) Sei $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in L^p(\mu)$. Dann ist $f + g \in L^p(\mu)$ und

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis. Der Fall $p = 1$ wurde in Lemma 8.1 gezeigt und der Fall $p = \infty$ ist offensichtlich.

Sei $1 < p < \infty$. Dann ist

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\}.$$

Also ist $|f + g|^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$. Damit ist $f + g \in L^p(\mu)$.

Nun zum Beweis der Ungleichung. Es ist

$$|f + g|^p = |f + g| \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{=:\eta} \leq |f|\eta + |g|\eta.$$

Offenbar ist

$$\int_X \eta^q \, \mathrm{d}\mu = \int |f + g|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu = \|f + g\|_p^p, \tag{5}$$

wobei die Identität $(p-1)q = p$ benutzt wurde. Also ist $\eta \in L^q(\mu)$ und $\|\eta\|_q \leq \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$.

Also gilt

$$\begin{aligned}
\int_X |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu = \|f + g\|_p^p \\
&\leq \int |f|\eta \, \mathrm{d}\mu + \int |g|\eta \, \mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{Lemma8.3}}{\leq} \|f\|_p \|\eta\|_q + \|g\|_p \|\eta\|_q \\
&\overset{(5)}{\leq} \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p).
\end{aligned}$$

Also ist $\|f + g\|_p = \|f + g\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. $\square$

Korollar 8.5 Der Raum $L^p(\mu)$ für $1 \leq p \leq \infty$ ist ein Vektorraum und durch $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $L^p(\mu)$ definiert. Das heißt $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ist normierter Raum.

Als Vorbereitung für die Vollständigkeit von L^p beweisen wir

Lemma 8.6 Sei $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$ und $f_n \xrightarrow{L^p} f$ (d.h. $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$). Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, sodass $f_{n_k} \to f$ f.ü.. Falls μ vollständiges Maß ist, dann ist auch f ist messbar.

Beweis. Sei $\varepsilon_k := 2^{-k}$. Weil $\|f_n - f\|_p \to 0$, gibt es für jedes k ein $n_k \in \mathbb{N}$, sodass $\mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon_k\}) \leq \varepsilon_k$ für alle $n, m \geq n_k$. O.B.d.A. sein $(n_k)_k$ wachsend. Wir setzen $g_k := f_{n_k}$. Wir zeigen, dass $(g_k)_k$ eine Cauchy-Folge f.ü. ist.

Sei

$$A_k := \{|g_k - g_{k+1}| > \varepsilon_k\}, \ A := \limsup_l A_l = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq l} A_k.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \mu(\cup_{k=l}^\infty A_k) \quad \forall l \in \mathbb{N} \\
&\leq \sum_{k=l}^\infty \mu(A_k) \leq \sum_{k=l}^\infty 2^{-k} \to 0 (l \to \infty)
\end{aligned}$$

Deswegen ist $\mu(A) = 0$.

Auf $X \setminus A$ möchten wir die Konvergenz $f_n \to f$ zeigen. Für beliebiges $x \in X \setminus A$ ist $x \notin \cup_{k \geq l} A_k$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Also $x \notin A_k$ für alle $k \geq l$. Das heißt
$$|g_k - g_{k+1}| \leq \varepsilon_k \; \forall k \geq l.$$

Für alle $p \geq 0$ gilt

$$|g_k(x) - g_{k+p+1}(x)| \leq \sum_{j=k}^{k+p} |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \to 0 (k \to \infty).$$

Also ist $(g_k(x))_k$ für jedes $x \in X \backslash A$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist $\lim_k g_k(x) =: f(x) \in \mathbb{R}$, d.h. $g_k \to f$ μ-f.ü.

Es bleibt noch die Messbarkeit von f. Es ist

$$f = \lim_k \chi_{X \setminus A} g_k + \chi_A f.$$

Der erste Teil auf der rechten Seite ist messbar, weil jedes g_k messbar ist. Die Werte von f auf A sind unwichtig, da $\mu(A) = 0$ und wegen der Vollständigkeit von μ jede Teilmenge von A auch messbar ist. Also ist auch $\chi_A f$ messbar. □

Satz 8.7 Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die $L^p(\mu)$-Räume vollständig, also Banachräume.

Beweis. Betrachte zunächst $p = \infty$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^\infty(\mu)$. Also existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ sodass für alle $i, j \geq N$ gilt
$$\|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon \; \forall i, j > N(\varepsilon).$$

Definiere folgende Mengen:

$$E_{n,m} := \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Dann folgt aus $\mu(E_{n,m}) = 0$, dass für $E := \bigcup_{n,m} E_{n,m}$ gilt

$$\mu(E) = 0.$$

Für $x \in X \setminus E$ folgt dann
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Das heißt $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge für alle $x \in X \setminus E$. Also ist

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{R}.$$

Auf E können wir z.B. $f = 0$ setzen. Weil alle f_n messbar sind, ist $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.

Auf $X \setminus E$ gilt:
$$\lim_{n \to \infty} |f_n(x)| = |f(x)|$$

und
$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \text{ fast überall.}$$

Also ist $|f_n(x)| \leq K$ fast überall und damit

$$|f(x)| \leq K \text{ fast überall}$$

Das heißt $f \in L^\infty(\mu)$.

Wir müssen noch zeigen $f_n \stackrel{\|\cdot\|_\infty}{\to} f$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Sei n fest und $m \to \infty$. Dann ist

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Also folgt die Behauptung für $p = \infty$.

Sei nun $1 \leq p < \infty$. Wir betrachten wieder eine Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$. Nach Lemma 8.6 gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, für die $f_{n_k} \to f$ μ-f.ü. Zu zeigen ist, dass $f_{n_k} \stackrel{L^p}{\to} f$.

Es ist $|f_{n_k} - f_n| \to |f - f_n|$ $\mu-$f.ü. für $k \to \infty$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p &= \int_X \lim_k |f_n - f_{n_k}|^p \, \mathrm{d}\mu \\
&\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_k \int_X |f_n - f_{n_k}|^p \, \mathrm{d}\mu = \liminf_k \|f_n - f_{n_k}\|_p^p \to 0 (n \to \infty),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Konvergenz aus der Cauchy-Eigenschaft folgt. □

Beispiel 8.8 Dieses Beispiel zeigt, dass aus der L^p-Konvergenz im Allgemeinen die f.ü.-Konvergenz der ganzen Folge *nicht* folgt.

Ein Beispiel ist die "dancing sequence" $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}$, usw. Die Formel lautet

$$f_n(x) = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}(x), n = 2^k + j, 0 \leq j < 2^k.$$

Es ist $\int |f_n| \, \mathrm{d}\mu = 2^{-k}, 2^k \leq n \leq 2^{k+1}$. Also $f_n \stackrel{L^1}{\to} 0$. Aber für jedes $x \in [0,1]$ gibt es unendlich viele n, sodass $f_n(x) = 1$. Also f_n konvergiert nicht gegen 0 f.ü.. Nach Lemma 8.6 gilt dies aber für eine Teilfolge.

Beispiel 8.9 Dieses Beispiel zeigt, dass aus der punktweise-Konvergenz die L^p-Konvergenz im Allgemeinen *nicht* folgt.

Betrachte $((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$. Sei $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Es konvergiert $f_n \to 0$ punktweise überall. Es ist aber

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_p &= \left(\int_{(0,\frac{1}{n}]} n^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(n^p \cdot \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n^{\frac{p-1}{p}} \geq 1
\end{aligned}$$

wegen $p \geq 1$.

9 Produktmaße und Mehrfachintegrale

Motivation: Betrachte die Maßräume $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$, $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}(\mathbb{R}^l), \lambda^l)$, $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \lambda^m)$ mit $d = l + m$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}}$. Gilt nun

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\lambda^d = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \,\mathrm{d}\,\lambda^m(x) \right) \mathrm{d}\,\lambda^l(y) = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \,\mathrm{d}\,\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\,\lambda^l(x)?$$

Allgemeiner: Sei $X = X_1 \times X_2$ und $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, Maßräume. Die Frage ist dann:

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\,\mu_2 \right) \mathrm{d}\,\mu_1 \stackrel{?}{=} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\,\mu_1 \circ \mu_2.$$

Darum wird es im Folgenden gehen. Die Antwort liefern die Sätze von Fubini und Tonelli.

Definition 9.1 Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und $X := X_1 \times X_2$ das kartesische Produkt von X_1 und X_2.

Die kleinste σ-Algebra in X, die die "messbaren Rechtecke" der Form $A_1 \times A_2$, wobei $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ enthält, heißt <u>Produkt-σ-Algebra</u> $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma\left(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}\right)$$

<u>Ziel:</u> Definition eines Maßes (Produktmaßes) auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Lemma 9.1 Sei $\pi_j : X_1 \times X_2 \to X_j$ mit $(x_1, x_2) \mapsto \pi_j(x_1, x_2) = x_j, j = 1, 2$ (d.h. die kanonische Projektion). Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

Eine Abbildung $T : X \to X_1 \times X_2$ ist genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar, wenn

$$\pi_j \circ T : X \to X_j$$

$\mathcal{A} - \mathcal{A}_j$ messbar ist für $j = 1, 2$.

Beweis. (a) Sei $T : X \to X_1 \times X_2$ messbar. Zunächst ist $\pi_j : X_1 \times X_2 \to X_j$ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}$-messbar, denn (z.B. $j = 1$):

Ist $A \in \mathcal{A}_1$, so ist $\pi_1^{-1}(A) = A \times X_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. (analog für $j = 2$.

Also ist auch $\pi_j \circ T$ messbar.

(b) Sei $\pi_j \circ T : X \to X_j, j = 1, 2$ messbar. Wir zeigen: T ist messbar.

Da $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist, genügt es zu zeigen:

$$T^{-1}(A_1 \times A_2) \in \mathcal{A} \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Es ist

$$A_1 \times A_2 = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2)$$

Also ist

$$\begin{aligned} T^{-1}(A_1 \times A_2) &= T^{-1}\left(\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2)\right) \\ &= T^{-1}(\pi_1^{-1}(A_1)) \cap T^{-1}(\pi_2^{-1}(A_2)) \\ &= \underbrace{(\pi_1 \circ T)^{-1}(A_1)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{(\pi_2 \circ T)^{-1}(A_2)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$\square$

Korollar 9.2 Sei $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ und $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$. Es gilt $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l})$.

Beweis. 1. Wir zeigen erst "$\supset$". Es ist

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l}) = \sigma(\mathcal{F}^{k+l}) = \sigma(\mathcal{J}^{k+l}),$$

wobei J^n das System der halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter ist

$$\mathcal{J}^{k+l} \subset \underbrace{\mathcal{A}_1}_{=\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)} \otimes \underbrace{\mathcal{A}_2}_{=\mathcal{B}(\mathbb{R}^l)}.$$

Damit ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l}) \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

2. "$\subset$": Wir betrachten die Identität $I : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, x \mapsto x$.

   Wir zeigen, dass die Identität eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l}) - \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ messbare Abbildung ist.

   Nach Lemma 9.1 genügt der Nachweis der Messbarkeit von $\pi_j \circ I$. Dies ist aber klar, da $\pi_j \circ I = \pi_j$ und die Projektionen stetig sind und damit messbar.

$\square$

Definition 9.2 (Notationen) Sei $E \subset X_1 \times X_2$ und $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Dann definieren wir

$$E_{x_1} := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$$
$$E^{x_2} := \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}.$$

Lemma 9.3 Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$ messbare Räume $(j = 1, 2)$.

(a) Für $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $x_j \in X_j$ ist

$$E_{x_1} \in \mathcal{A}_2, \quad E^{x_2} \in \mathcal{A}_1.$$

(b) Ist $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 - (\overline{\mathbb{R}}$-messbare Funktion, so sind

$$f(x_1, \cdot) : X_2 \to \overline{\mathbb{R}},\ \mathcal{A}_2 - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\text{-messbar}$$
$$f(\cdot, x_2) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}},\ \mathcal{A}_1 - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\text{-messbar.}$$

Beweis. (a) Sei $x_1 \in X_1$. Definiere eine Funktion $\varphi_{x_1} : X_2 \to X_1 \times X_2$ durch

$$t \mapsto \varphi_{x_1}(t) = (x_1, t)$$

Es ist $E_{x_1} = \varphi^{-1}(E)$. Also es reicht zu zeigen, dass φ_{x_1} messbar ist.

Nach Lemma 9.1 ist φ_{x_1} $\mathcal{A}_2 - (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$-messbar genau dann wenn $\pi_j \circ \varphi_{x_1}$ $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_j$-messbar sind. $\pi_1 \circ \varphi_{x_1} : X_2 \to X_1, t \mapsto x_1$ ist messbar da konstant. $\pi_2 \circ \varphi_{x_1} : X_2 \to X_1, t \mapsto t$ ist messbar da stetig. Analog argumentiert man für E^{x_2}.

(b) Wegen $f(x_1, \cdot) = f \circ \varphi_{x_1}$ und wegen der Messbarkeit von f und φ_{x_1} ist $f(x_1, \cdot)$ messbar. Analog für $f(\cdot, x_2)$.

$\square$

Lemma 9.4 Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$ σ-endliche Maßräume. Dann gilt:

Für jedes $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sind die Funktionen

$$\varphi_E : X_1 \to [0, \infty], x_1 \mapsto \mu_2(E_{x_1}) \quad \mathcal{A}_1 - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\text{-messbar},$$
$$\psi_E : X_2 \to [0, \infty], x_2 \mapsto \mu_1(E^{x_2}) \quad \mathcal{A}_2 - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\text{-messbar}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis nur für φ_E durch. Sei

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : \varphi_E \text{ ist messbar}\}.$$

Das Ziel ist also zu zeigen, dass $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{D}$.

I) Sei μ_2 ein endliches Maß, d.h. $\mu_2(X_2) < \infty$.

Behauptung $\mathcal{D}$ erfüllt:

(i) $X_1 \times X_2, \emptyset \in \mathcal{D}$

(ii) $A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \implies A \setminus B \in \mathcal{D}$

(iii) $(A_j)_j \subset \mathcal{D}, A_j \nearrow A \implies A \in \mathcal{D}$

Beweis. (der Behauptung)

(i) $\varphi_{X_1 \times X_2}, \varphi_\emptyset$ sind beide konstante Funktionen, also messbar.

(ii) Sei $A, B \in \mathcal{D}, B \subset A$. Es gilt

$$\varphi_{A \setminus B}(x_1) = \mu_2((A \setminus B)_{x_1}) = \mu_2(A_{x_1}) - \mu_2(B_{x_1}) = \varphi_A(x_1) - \varphi_B(x_1)$$

weil $(A \setminus B)_{x_1} = A_{x_1} \setminus B_{x_1}, B_{x_1} \subset A_{x_1}$ und $\mu_2(A_{x_1}) < \infty, \mu_2(B_{x_1}) < \infty$ wegen der Endlichkeit von μ_2. Aus der Messbarkeit von φ_A, φ_B folgt die Messbarkeit von $\varphi_{A \setminus B}$.

(iii) Sei $(A_j)_j \subset \mathcal{D}, A_j \nearrow A$. Dann folgt $A_{j_{x_1}} \nearrow A_{x_1}$, also $\varphi_{A_j} \nearrow \varphi_A$. Aus der Messbarkeit von φ_{A_j} folgt die Messbarkeit von φ_A.

□

Das System $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System (Definition nach dem Beweis). Dies gilt, weil aus (i) und (ii) die Eigenschaft (b) folgt und aus (iii) die Eigenschaft (c) folgt.

Wir betracten nun das Kartesische Produkt $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$. Es gilt $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{D}$, weil für $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist $\varphi_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \chi_{A_1}(x_1)\mu_2(A_2)$ und $\chi_{A_1} : X_1 \to \{0, 1\}$ messbar ist. $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist offenbar $\cap$-stabil (Definition nach dem Beweis).

Die Anwendung des Lemmas von Dynkin (Lemma 9.5) auf $\mathcal{C} := \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{M} := \mathcal{D}$ liefert

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \subset \mathcal{D}.$$

II) Sei nun μ_2 nur σ-endlich. Es gibt also $(A_j)_j \subset \mathcal{A}_2$ mit $A_j \nearrow X_2$ und $\mu_2(A_j) < \infty$ für alle j. Sei $\mu^{(j)} : \mathcal{A}_2 \to [0, \infty], A \mapsto \mu_2(A \cap A_j)$. $\mu^{(j)}$ is endlich, also nach I) ist $x_1 \mapsto \mu^{(j)}(E_{x_1})$ messbar. $\varphi_E(x_1) = \lim_j \mu^{(j)}(E_{x_1})$ ist also auch messbar.

□

Definition Sei X eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset P(X)$ heißt ein Dynkin-System über X, falls

(a) $X, \emptyset \in \mathcal{M}$,

(b) $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$,

(c) $(A_j)_j \subset \mathcal{M}$ paarweise disjunkt $\implies \cup_j A_j \in \mathcal{M}$.

Bemerkung 9.3 Übung: Jede $\sigma-$Algebra ist ein Dynkin-System, aber ein Dynkin-System ist i.A. keine σ-Algebra.

Definition Sei X eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset P(X)$ heißt durchschnittsstabil ($\cap$-stabil), falls aus $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ auch $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ folgt.

Lemma 9.5 (von Dynkin) Seien X_1, X_2 beliebige Mengen. Sei $\mathcal{C} \subset P(X_1 \times X_2)$ $\cap$-stabil und sei $\mathcal{M} \supset \mathcal{C}$ ein Dynkin-System. Dann gilt $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.

Beweis. Durchschnitte beliebiger Dynkin-Systeme sind Dynkin-Systeme (Übung!). Deswegen gibt es das kleinste Dynkin-System, welches $\mathcal{C}$ enthält. Wir bezeichnen dies mit $\mathcal{M}_0$. Im Beweis zeigen wir $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}_0$.

$''\supset''$ ist trivial, da auch $\sigma(\mathcal{C})$ ein $\mathcal{C}$-enthaltendes Dynkin-System ist. Für "$\subset$" reicht z.z., das $\mathcal{M}_0$ $\cap$-stabil ist, denn aus (a) folgt $X, \emptyset \in \mathcal{M}_0$; aus (b) und der $\cap-$Stabilität folgt $A \setminus B = B^c \cap A \in \mathcal{M}_0$ für $A, B \in \mathcal{M}_0$; und aus (c) folgt, dass abzählbare Vereinigungen in $\mathcal{M}_0$ liegen. Also $\mathcal{M}_0$ ist eine σ-Algebra. Aus $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$ und da $\mathcal{M}_0$ eine σ-Algebra ist, folgt $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}_0$.

Also bleibt z.z., dass $\mathcal{M}_0$ $\cap$-stabil ist.

1) Erst zeigen wir, dass $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{M}_0 \implies A \cap B \in \mathcal{M}_0$.
   Sei $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M}_0 : A \cap B \in \mathcal{M}_0\}$. Da $\mathcal{C}$ $\cap$-stabil ist, folgt $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_A$. Es ist leicht zu zeigen, dass $\mathcal{M}_A$ ein Dynkin-System ist (Übung!). Also ist $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_A$.

2) Nun zeigen wir, dass $A, B \in \mathcal{M}_0 \implies A \cap B \in \mathcal{M}_0$.
   ...

□

Konstruktion vom Produktmaß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

Für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sei jetzt

$$\begin{aligned}
\rho(A) &:= \int_{X_1} \varphi_A(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_{A_{x_1}}(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1), \\
\nu(A) &:= \int_{X_2} \psi_A(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2 = \int_{X_1} \mu_2(A^{x_2}) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \chi_{A^{x_2}}(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2).
\end{aligned}$$

Behauptung ρ, ν sind Maße auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Beweis. 1) Seien $(A_j)_j \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ paarweise disjunkt und $A := \cup_j A_j$. Aus $A_{x_1} = \cup_j A_{j_{x_1}}, A^{x_2} = \cup_j A_{j^{x_2}}$ folgt

$$\varphi_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2(\cup_j A_{j_{x_1}}) = \sum_j \mu_2(A_{j_{x_1}}) = \sum_j \varphi_{A_j}(x_1).$$

Genauso $\psi_A(x_2) = \sum_j \psi_{A_j}(x_2)$.

rechts in diesen Gleichung stehen Limiten von monotonen Folgen messbarer Funktionen. Nach dem Satz von Beppo Levi ist

$$\rho(A) = \int_{X_1} \sum_j \varphi_{A_j}(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1 = \sum_j \int_{x_1} \varphi_{A_j}(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1 = \sum_j \rho(A_j)$$

und analog $\nu(A) = \sum_j \nu(A_j)$.

2) Offenbar ist $\rho(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

□

Das Ziel ist zu verstehen, wann $\rho = \nu$ gilt.

Beide ρ und ν sind Fortsetzungen des Inhalts $\mu_1 \times \mu_2 : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$, $A_1 \times A_2 \mapsto \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ zum Maß. Falls μ_1 und μ_2 σ-endlich sind, ist auch $\mu_1 \times \mu_2$ σ-endlich und nach dem Eindeutigkeitssatz von Caratheodory ist $\nu = \rho$.

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Satz 9.6 Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ für $j = 1,2$ σ-endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, welches die Eigenschaft

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$$

hat. Für jedes $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und alle $x_j \in X_j, j = 1,2$ sind $\varphi_E(x_1) := \mu_2(E_{x_1})$ und $\psi_E(x_2) := \mu_1(E^{x_2})$ messbar.

Definition Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ für $j = 1,2$ σ-endliche Maßräume. $\mu_1 \otimes \mu_2 := \rho = \nu$ heißt das Produktmaß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Mehrfachintegrale, Sätze von Fubini und Tonelli

Lemma 9.7 Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ für $j = 1,2$ σ-endliche Maßräume und $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ eine Treppenfunktion. Dann gilt

$$\int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

Beweis. $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ mit $(\alpha_k)_k \subset \mathbb{R}$ und $(A_k)_k \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ paarweise disjunkt.

$$\begin{aligned}\int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1 \times X_2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{X_1 \times X_2} \chi_{A_k}\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho(A_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{X_1} \left(\underbrace{\int_{X_2} \chi_{A_{k_{x_1}}}(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)}_{=\mu_2(A_{k_{x_1}})} \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \sum_{k=1}^n \chi_{A_{k_{x_1}}}(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1).\end{aligned}$$

Analog gilt $\int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$. □

Satz 9.8 (Fubini; Tonelli) Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ für $j = 1, 2$ σ-endliche Maßräume und $f : X_1 \times X_2 \to \overline{R}$ messbar ($\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 - \mathcal{B}(\overline{R})$-messbar). Dann gilt

1) Falls $f \geq 0$, dann sind

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2), \quad x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

messbar und

$$\int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2). \tag{6}$$

2) (**Fubini**) Falls $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$, dann ist $f(x_1, \cdot) \in L^1(\mu_2)$ für f.a. $x_1 \in X_1$ und $f(\cdot, x_2) \in L^1(\mu_1)$ für f.a. $x_2 \in X_2$ und es gilt (6).

3) (**Tonelli**) Falls eines der iterierten Integrale

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \text{ oder } \int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

endlich ist, dann ist $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ und es gilt (6).

Beweis. Beweis der Aussage 1: Es gilt

(i) $\exists (f_j)_j$ Treppenfunktionen mit $f_j \nearrow f$

(ii) f_j sind also alle messbar

(iii) $f_j(\cdot, x_2)$ und $f_j(x_1, \cdot)$ sind messbar für alle j

Die Eigenschaft (iii) gilt (z.B. für $f_j(\cdot, x_2)$), weil:

Für ein $A \in \mathcal{B}([0, \infty])$ is

$$(f_j(\cdot, x_2))^{-1}(A) = (f_j^{-1}(A))^{x_2},$$

d.h. ein Schnitt einer Menge in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Nun ist das System $\mathcal{M}$ aller Mengen $M \subset X_1 \times X_2$, für die M_{x_1}, M^{x_2} für alle $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ messbar sind, eine σ-Algebra und $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{M}$. Der Beweis von dieser Aussage ist eine Übungsaufgabe. Deswegen haben wir $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{M}$.

Aus (i) und (iii) folgt mit B.Levi, dass $\int_{X_k} f_j\,\mathrm{d}\mu_k \nearrow \int_{X_k} f\,\mathrm{d}\mu_k$, k=1,2. Wie im Beweis von Lemma 9.7 gilt die Messbarkeit von $\int_{X_k} f_j\,\mathrm{d}\mu_k$ für alle j und deswegen die Messbarkeit von $\int_{X_k} f\,\mathrm{d}\mu_k$.

Die Anwendung von B.Levi an (i) und (ii) liefert $\int_{X_1 \times X_2} f_j\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) \nearrow \int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)$. Aus Lemma 9.7 folgt für alle j

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_j(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} f_j\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_1} f_j(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

Eine wiederholte Anwendung von B.Levi liefert das Resultat.

Beweis der Aussage 2: Es ist $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2) \Leftrightarrow |f| \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$. Aus (6) für $|f|$ folgt

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f_j(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) < \infty,$$

also $f(x_1,\cdot) \in L^1(\mu_2)$ für f.a. x_1. Genauso gilt $f(\cdot,x_2) \in L^1(\mu_1)$ für f.a. x_2. Für f gilt (6) durch die Anwendung von 1) auf f_+ und f_-. Hier ist $f(\cdot,x_2) \in L^1(\mu_1)$ und $f(x_1,\cdot) \in L^1(\mu_2)$ wichtig.

Beweis der Aussage 3: Mit 1) folgt $\int_{X_1\times X_2} |f| \,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$, d.h. $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$. Aus 2) folgt dann (6). $\square$

10 Transformation von Maßen, Transformationsformeln

Ziel: Wir möchten eine Transformation der Variablen im Integral durchführen. Für das Lebesgue-Integral werden wir zeigen, dass falls $\Phi : U \to V$ (mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein C^1-Diffeomorphismus ist, dann gilt

$$\int_V f(y) \,\mathrm{d}\,\lambda^n(y) = \int_U (f \circ \Phi)(x) |\det D\Phi(x)| \,\mathrm{d}\,\lambda^n(x).$$

10.1 Bildmaß

Definition Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ messbarer Raum und $T : X \to X'$ messbar. Das Bildmaß μ_T zu μ ist

$$\mu_T : \begin{cases} \mathcal{A}' \to [0,\infty] \\ A' \mapsto \mu_T(A') := \mu(T^{-1}(A')) \end{cases}.$$

Lemma 10.1 μ_T ist ein Maß.

Beweis. Übung! $\square$

Lemma 10.2 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ und $(X'', \mathcal{A}'')$ messbare Räume sowie $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ seien messbar. Dann gilt:

$$\mu_{g\circ f} = (\mu_f)_g.$$

Beweis. Es ist für alle $A'' \in \mathcal{A}''$:

$$\begin{aligned} \mu_{g\circ f}(A'') &= \mu\left((g \circ f)^{-1}(A'')\right) = \mu\left(f^{-1}\left(g^{-1}(A'')\right)\right) \\ &= \mu_f\left(g^{-1}(A'')\right) = \left(\mu_f\right)_g(A''). \end{aligned}$$

$\square$

Satz 10.3 (Bildmaßformel) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum, $T : X \to X'$ messbar und $f : X' \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:

f ist genau dann μ_T-integrierbar, wenn $f \circ T : X \to \mathbb{R}$ μ-Integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_{A'} f \,\mathrm{d}\,\mu_T = \int_{T^{-1}(A')} (f \circ T) \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

Beweis. Wir beweisen das ganze nur für $f = \chi_{B'}$, $B' \in \mathcal{A}'$. Der Rest folgt wie immer.

Es ist

$$\begin{aligned} \int_{A'} \chi_{B'} \,\mathrm{d}\,\mu_T &= \int_{X'} \chi_{B'} \cdot \chi_{A'} \,\mathrm{d}\,\mu_T = \int_{X'} \chi_{B'\cap A'} \,\mathrm{d}\,\mu_T \\ &= \mu_T(B' \cap A') = \mu\left(T^{-1}(B' \cap A')\right) \end{aligned} \qquad (*)$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{T^{-1}(A')} (\chi_{B'} \circ T) \,\mathrm{d}\mu &= \int_X (\chi_{B'} \circ T)\, \chi_{T^{-1}(A')} \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_{T^{-1}(B')}\chi_{T^{-1}(A')} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \chi_{T^{-1}(B') \cap T^{-1}(A')} \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_{T^{-1}(A' \cap B')} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \mu\left(T^{-1}(A' \cap B')\right) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Es stimmen $(*)$ und $(**)$ überein. □

Korollar 10.4 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum, $T : X \to X'$ messbar. Ferner sei $f : X \to \mathbb{R}_+$ messbar und

$$\nu : \begin{cases} \mathcal{A} \to [0, \infty] \\ A \mapsto \nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu \end{cases}$$

Ist T bijektiv und T^{-1} ebenfalls messbar, dann ist

$$\nu_T : \begin{cases} \mathcal{A}' \to [0, \infty] \\ A' \mapsto \int_{A'} (f \circ T^{-1}) \,\mathrm{d}\mu_T. \end{cases}$$

Beweis. Sei $A' \in \mathcal{A}'$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\nu_T(A') = \nu(T^{-1}(A')) &= \int_{T^{-1}(A')} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{T^{-1}(A')} \left(f \circ T^{-1} \circ T\right) \,\mathrm{d}\mu = \int_{T^{-1}(A')} \left(\left(f \circ T^{-1}\right) \circ T\right) \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

□

Anwendung vom Bildmaß: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition 10.1 Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P(\Omega) = 1$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum. $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß.

Hinweis 10.2 Die ursprüngliche Definition von Kolmogorov (1932) ist eine Variante obiger Definition, die wie folgt lautet:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist Wahrscheinlichkeitsraum, falls $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum ist und $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ eine endlich additive Mengenfunktion ist mit

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ und $P(B_n)$ stetig von oben gegen 0, falls

$$(B_n) \subset \mathcal{A},\ B_1 \supset B_2 \supset \dots,\ \bigcap B_i = \emptyset$$

Nach Kapitel 3 sind beide Definitionen äquivalent, da σ-Additivität einer endlich additiven Mengenfunktion mit der Stetigkeit von oben äquivalent ist.

Beispiel 10.3 (1) $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(2) Sei $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0 < \lambda(\Omega) < \infty$. Dann ist mit $P = \frac{1}{\lambda(\Omega)}\lambda$ der Raum $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(3) Sei $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $\mathcal{A} := \{\emptyset, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$ und

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 0 \\ P(\Omega) &= 1 \\ P(\{2,4,6\}) = P(\{1,3,5\}) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dann ist der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 10.4 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Jedes Element $A \in \mathcal{A}$ heißt Ereignis.

(ii) Ω heißt Ereignisraum.

(iii) $A = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$ heißt Elementarereignis.

(iv) $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ heißt Ereignissystem.

(v) Sei $\omega \in \Omega$ fest, dann sagt man, dass ein Ereignis $a \in \mathcal{A}$ eintritt, falls $\omega \in \mathcal{A}$.

Beispiel 10.5 Sei $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ eine Ereignismenge. Würfeln einer geraden oder ungeraden Zahl:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$$

und P definiert durch:

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 0 \\ P(\Omega) &= 1 \\ P(\{2,4,6\}) = P(\{1,3,5\}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$P(A)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A.

Definition 10.6 (Zufallsgrößen) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum. Eine messbare Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt Zufallsgröße.

X heißt Zufallsvariable, falls $(\Omega', \mathcal{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. X heißt reelle Zufallsvariable, falls $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$. X heißt Zufallsvektor, falls $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Problem: Gesucht: Verteilung von X, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsvariable X Werte einer Menge $A' \in \mathcal{A}'$ an? Die Antwort lautet $P_X(A')$.

Beispiel 10.7 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(1) Sei $X \equiv a \in \mathbb{R}$, $X' = \mathbb{R}, \mathcal{A}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } a \notin B, \\ \Omega, & \text{falls } a \in B. \end{cases}$$

Damit ist $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = \begin{cases} 0, & a \notin B \\ 1, & a \in B \end{cases} = \delta_a(B).$

(2) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Annahme: X nimmt lediglich zwei verschiedene Werte an, d.h. $X(\Omega) = \{a, b\}$ $(a \neq b)$, wie zum Beispiel beim Werfen eines Würfels: gerade oder ungerade Zahlen.

$$X(\omega) = \begin{cases} a, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ b, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p. \end{cases}$$

$p \in (0, 1)$. Dann ist

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & a, b \in B, \\ \emptyset, & a, b \notin B, \\ X^{-1}(a), & a \in B, b \notin B, \\ X^{-1}(b), & a \notin B, b \in B. \end{cases}$$

Damit ist

$$P_X(B) = \begin{cases} 1, & a, b \in B, \\ 0, & a, b \notin B, \\ p, & a \in B, b \notin B, \\ 1-p, & a \notin B, b \in B. \end{cases}$$

Also ist

$$P_X(B) = p\delta_a(B) + (1-p)\delta_b(B).$$

(iii) Allgemein: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable, d.h. X nimmt Werte $a_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \mathbb{N}$ an.

Annahme: X nimmt den Wert a_i mit Wahrscheinlichkeit p_i an. Und $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Dann ist

$$P_X = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{a_i}.$$

(i) Geometrische Verteilung.

$$p_i = (1-q)q^i, \ i = 0, 1, \dots.$$

(ii) Poissonverteilung

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \ i = 0, 1, 2, \dots.$$

Definition 10.8 (Erwartungswert) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable. Dann ist

$$\mathbb{E}(X) := \int X(\omega) \,\mathrm{d}\, P(\omega)$$

der Erwartungswert von X.

Bemerkung 10.9 Mit der Bildmaßformel ist $\mathbb{E}(x) = \int_\Omega X \,\mathrm{d}\, P = \int_\mathbb{R} x \,\mathrm{d}\, P_X$. Man setze einfach $f(x) = x$ in der Bildmaßformel.

Beispiel 10.10 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{a, b\}$. Sei p die Wahrscheinlichkeit von $X(\omega) = a$.

Dann ist

$$P_X = p\delta_a + (1-p)\delta_b.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\, P_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} xp \,\mathrm{d}\, \delta_a + \int_{\mathbb{R}} x(1-p) \,\mathrm{d}\, \delta_b \\ &= ap + b(1-p).\end{aligned}$$

10.2 Lineare Abbildungen des Lebesgue-Maßes

Bekannt:

(i) Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein translationsinvariantes Maß mit $\mu\left((0,1]^n\right) < \infty$. Dann ist

$$\mu = \mu\left((0,1]^n\right) \lambda^n.$$

(ii) λ^n ist das einzige translationsinvariante Maß μ mit

$$\mu\left((0,1]^n\right) = 1.$$

Ziel: Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare reguläre Abbildung. Wie berechnet sich λ^n_T?

Satz 10.5 Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $T(x) = Dx$ mit D eine reguläre Matrix. Dann gilt

$$\lambda^n_T = \frac{1}{|\det(D)|} \lambda^n.$$

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen $\lambda^n_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ist translationsinvariant.
Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig fest. Zu zeigen ist $\lambda^n_T(x + B) = \lambda^n_T(B)$. Es ist:

$$\lambda^n_T(x+B) = \lambda^n(T^{-1}(x+B)) = \lambda^n(T^{-1}x + T^{-1}B) = \lambda^n(T^{-1}B) = \lambda^n_T(B).$$

Wir wissen also, dass $\lambda^n_T = \lambda^n_T((0,1)^n)\lambda^n$.
Schritt 2: Zu zeigen bleibt

$$\lambda^n_T\left(W^n\right) = \frac{1}{|\det D|}, \text{ wobei } W^n = (0,1]^n.$$

(i) Sei $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ mit $d_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für alle j.

$$\lambda^n(D^{-1}W^n) = \lambda^n\left(\Pi_{j=1}^n \left(\frac{1}{d_j}(0,1)\right)\right) \overset{\text{Produkt-Maß}}{=} \Pi_{j=1}^n \lambda^1\left(\frac{1}{d_j}(0,1)\right) = \Pi_{j=1}^n \frac{1}{|d_j|} = \frac{1}{|\det D|}.$$

(ii) Sei D eine orthogonale Matrix. Wir wählen als Testmenge die Einheitskugel $B := B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, weil die unter orthogonalen Matrizen invariant ist.

$$\lambda^n_T(B) = \lambda^n(D^{-1}B) = \lambda^n(D^T B) = \lambda^n(B).$$

Da $\det D = \pm 1$ für orthogonale D, gilt $\lambda^n_T = \frac{1}{|\det(D)|}\lambda^n$.

(iii) Sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Nach Lemma 10.6 ist $D = S_1 \Lambda S_2$ mit S_1, S_2 orthogonal und Λ diagonal mit positiven Diagonal-Einträgen.

$$\begin{aligned}\lambda^n_T(W^n) &= \lambda^n(D^{-1}W^n) = \lambda^n(S_2^T\Lambda^{-1}S_1^TW^n) \overset{(ii)}{=} \lambda^n(\Lambda^{-1}S_1^TW^n)\\ &= \underbrace{|\det\Lambda^{-1}|}_{=1/|\det\Lambda|}\lambda^n(S_1^TW^n) = \frac{1}{|\det\Lambda|}\lambda^n(W^n) = 2\frac{1}{|\det\Lambda|} = \frac{1}{|\det(D)|},\end{aligned}$$

weil $\det(S_1\Lambda S_2) = \det S_1 \det\Lambda \det S_2 = \det\Lambda$.

□

Lemma 10.6 Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Dann existieren $O_1, O_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und $\Lambda = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots d_n)$ mit $d_j > 0$ für alle j, sodass $M = O_1\Lambda O_2$.

Beweis. ... □

10.3 Transformationsformel

Satz 10.7 Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus (d.h. Φ ist bijektiv, Φ und Φ^{-1} sind stetig differenzierbar). Sei $D\Phi$ die Jacobimatrix. Dann gilt:

Eine messbare Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann (Lebesgue-)integrierbar (d.h.$\in L^1(V)$), wenn

$$(f\circ\Phi)|\det D_\Phi| : U \to \mathbb{R}$$

auf U Lebesgue-integrierbar ist (d.h. $\in L^1(U)$). Und es gilt:

$$\int_V f(y)\underbrace{\mathrm{d}\,\lambda^n(y)}_{=:\mathrm{d}\,y} = \int_U (f\circ\Phi)(x)|\det D_\Phi(x)|\underbrace{\mathrm{d}\,\lambda^n(x)}_{=:\mathrm{d}\,x}. \tag{7}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz nur für eine Treppe $f = \chi_{\Phi(A)}$ mit $A \in \mathcal{B}(U)$. Die Verallgemeinerung auf messabre f ist wie immer. Beachte, dass wegen der Messbarkeit von Φ und Φ^{-1} gilt $A \in \mathcal{B}(U) \Leftrightarrow \Phi(A) \in \mathcal{B}(V)$.

Sei also $f = \chi_{\Phi(A)}$ mit $A \in \mathcal{B}(U)$. Es ist $\int_V f(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \lambda^n(\Phi(A))$ und

$$\begin{aligned}&\int_U (f\circ\Phi)(x)|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_U (\chi_{\Phi(A)}\circ\Phi)(x)|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x)\\ &= \int_U \chi_A(x)|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_A |\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x).\end{aligned}$$

Zu zeigen ist also

$$\lambda^n(\Phi(A)) = \int_A |\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \text{ für alle } A \in \mathcal{B}(U). \tag{8}$$

Dies wird per Induktion in n gemacht.

(i) $n = 1$:
Sei A erst ein Intervall, $A := [a, b]$. O.B.d.A. sei $\Phi'(x) > 0$ für alle $x \in U$.

$$\lambda^1(\Phi(A)) = \lambda^1([\Phi(a), \Phi(b)]) = \Phi(b) - \Phi(a) = (R-)\int_a^b \Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \Phi'\,\mathrm{d}\lambda^1 = \int_A |\Phi'|\,\mathrm{d}\lambda^1.$$

Wir müssen noch zeigen, dass dies für alle $A \in \mathcal{B}(U)$ gilt. Sei dafür $\mu(A) := \lambda^1(\Phi(A)), \nu(A) := \int_A |\Phi'| \, \mathrm{d}\lambda^1$. Beide μ und ν sind Maße auf $\mathcal{B}(U)$, die identisch auf der Menge der kompakten Intervalle $[a, b]$ sind. Da solche Intervalle $\mathcal{B}(U)$ erzeugen, folgt aus Korollar 4.5, dass $\mu = \nu$ auf $\mathcal{B}(U)$.

Für das weitere reicht es zu zeigen, dass (8) lokal zu jedem $p \in U$ gilt, d.h. auf einer Umgebung von p. Man kann dan nämlich U mit abzählbaren vielen solchen Umgebungen überdecken und da beide Seiten von (8) σ-additiv sind, folgt (8).

(ii) $(n-1) \to n$:

Sei $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus und $p \in U$. Es ist $D\Phi(p) \neq 0$. O.B.d.A. sei $\partial_{x_1}\Phi_1(p) \neq 0$. Wir definieren $\Psi(x) := (\Phi_1(x), x_2, \dots, x_N)^T$. Es ist

$$D\Psi = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\Phi_1 & \partial_{x_2}\Phi_1 & \dots & \partial_{x_n}\Phi_1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Also $\det D\Psi(p) \neq 0$. Ψ ist daher (Satz über die inverse Funktion) ein lokaler Diffeomorphismus auf einer Umgebung von p. Für $\rho := \Phi \circ \Psi^{-1}$ gilt $\rho(y) = (y_1, \rho_2(y), \dots, \rho_n(y))$. Deshalb

$$\Phi = \rho \circ \Psi,$$

wobei beide ρ und Ψ mindestens eine Variable fest lassen.

Als nächstes argumentieren wir, dass es reicht nur die Φ zu betrachten, die die erste Variable fest lassen. Erstens gilt, dass falls (8) für zwei Diffeomorphismen $\Phi_1 : U \to V$ und $\Phi_2 : V \to W$ gilt, so gilt es auch für $\Phi_2 \circ \Phi_1$, da

$$\int_W f(z) \, \mathrm{d}z = \int_V (f \circ \Phi_2)(y) |\det D\Phi_2(y)| \, \mathrm{d}y = \int_U (f \circ \Phi_2 \circ \Phi_1)(x) |\det(D\Phi_2)(\Phi_1(x))| |\det D\Phi_1(x)| \, \mathrm{d}x$$

und weil nach der Kettenregel $D(\Phi_2 \circ \Phi_1)(x) = (D\Phi_2)(\Phi_1(x)) D\Phi_1(x)$. Zweitens wissen wir, dass (8) für Permutationen P gilt (da diese $|\det P| = 1$ erfüllen).

Wir können nun Φ als eine Verkettung einer Permutation P und zweier Diffeomorphismen, die die erste Variable fest lassen, schreiben:

$$\Phi = \rho \circ \Psi = \rho \circ P \circ \widetilde{\Psi},$$

wobei $\widetilde{\Psi}(x) = (x_1, \widetilde{\Psi}_2(x), \dots, \widetilde{\Psi}_n(x))$. Daher reicht es nur die Φ zu betrachten, die die erste Variable fest lassen.

Sei also

$$\Phi : (t, \widetilde{x}) \mapsto (t, \Phi_t(\widetilde{x})) \text{ mit } \widetilde{x} := (x_2, x_3, \dots, x_n)$$

und

$$\Phi_t : U_t := \{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, \widetilde{x}) \in U\} \to \mathbb{R}^{n-1}.$$

Es gilt

$$D\Phi(t, \widetilde{x}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & D\Phi_t(\widetilde{x}) & \\ & & & \end{array}\right)$$

und daher $\det D\Phi(t,\widetilde{x}) = \det D\Phi_t(\widetilde{x})$. Für dieses Φ ist

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\Phi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(\Phi(A)_t)\,\mathrm{d}\lambda^1(t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(\Phi_t(A_t))\,\mathrm{d}\lambda^1(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_t} |\det D\Phi_t(\widetilde{x})|\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(\widetilde{x}) \right) \mathrm{d}\lambda^1(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t}\,|\det D\Phi(t,\widetilde{x})|\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(\widetilde{x}) \right) \mathrm{d}\lambda^1(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A\,|\det D\Phi|\,\mathrm{d}\lambda^n = \int_A |\det D\Phi|\,\mathrm{d}\lambda^n,
\end{aligned}$$

wobei wir zwischen der ersten und der zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung und im vorletzten Schritt den Satz von Tonelli benutzt haben.

□

Bemerkung 10.11 Gleichung (7) erlaubt uns für einen C^1-Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen das Bildmaß λ^n_Φ darzustellen. Es ist nämlich

$$\lambda^n_\Phi(A') = \int_{A'} |\det D\Phi^{-1}|\,\mathrm{d}\lambda^n$$

für alle $A' \in \mathcal{B}(V)$.

Um dies zu zeigen, verwenden wir erst die Definition vom Bildmaß $\lambda^n_\Phi(A') = \lambda^n(\Phi^{-1}(A')) = \int_{\Phi^{-1}(A')} 1\,\mathrm{d}\lambda_n(x)$. Mit der Transformation $x = \Phi^{-1}(y)$ ist nun $\int_{\Phi^{-1}(A')} 1\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_{A'} |\det D\Phi^{-1}(y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(y)$.

Beispiel 10.12 (Volumen eines Paraboloidschnittes) Für das Paraboloid $z = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2$ mit $z \in [0,h], h > 0$ ist der Volumen

$$\begin{aligned}
V &= \int_{[0,h]} \int_{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2 \le z} 1\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z = 4 \int_{[0,h)]} \int_{[0,a\sqrt{z}]} \int_{[0,b\sqrt{z-(\frac{x}{a})^2}]} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&= 4 \int_{[0,h)]} \int_{[0,a\sqrt{z}]} b\sqrt{z - (\tfrac{x}{a})^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Mit der Transformation $x = \Phi(t) := \sqrt{z}a \sin t$ ist

$$V = 4 \int_{[0,h)]} \int_{[0,\pi/2]} abz \cos^2 t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z,$$

da $D\Phi(t) = \sqrt{z}a\cos t = |\det D\Phi(t)|$. Also ist

$$V = 4ab \int_0^h z \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi ab \int_0^h z\,\mathrm{d}z = \pi ab \frac{h^2}{2}.$$

Beispiel 10.13 (Schwerpunkt) Für ein $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda^n(G) < \infty$ heißt

$$x_G := \frac{1}{\lambda^n(G)} \int_G x\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \in \mathbb{R}^n$$

der Schwerpunkt von G.

Wir berechnen den Schwerpunkt der rechten Hälfte der Ellipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$. Offenbar ist $x_{G,2} = 0$. Wir zeigen, dass $x_{G,1} = \frac{4a}{3\pi}$.

...

11 Die Faltung

Definition 11.1 Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, \infty]$. Dann heißt

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y)$$

die Faltung von f und g.

Bemerkung 11.2 Die Wohldefiniertheit von $(f * g)$, d.h. die Integrierbarkeit von $f(x - \cdot)g(\cdot)$, wird unten gezeigt.

Motivation

1. ODEs: Für $dx/dt = Ax + f(t), x(0) = x_0$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die Lösung $x(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s$. Es ist also $x(t) = e^{At}u_0 + (T * f)(t)$, wobei $T(t) := e^{At}$, falls wir $f(t) := 0$ für $t < 0$ und $T(t) := 0$ für $t < 0$ setzen.
2. PDEs Für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ mit $u(x, 0) = u_0(x)$ ist die Lösung $u(x,t) = (\rho_t * u_0)(x)$, wobei $\rho_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)}$.

11.1 Die Faltung in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Aus $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt nicht, dass $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ein Beispiel (für $n = 1$) ist $f(t) = g(t) = e^{-|t|}|t|^{-1/2}$. Die Funktion $e^{-2|t|}|t|^{-1}$ ist nicht in L^1 (die Singularität in $t = 0$ ist zu stark). Anders als das Produkt, ist die Faltung für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ aber definiert:

Satz 11.1 Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(y) < \infty \text{ für f.a. } x \in \mathbb{R}^n$$

und es gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Außerdem gilt die Symmetrie $f * g = g * f$.

Beweis. ... □

11.2 Die Faltung in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, \infty]$

Satz 11.2 Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in (1, \infty]$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(y) < \infty \text{ für f.a. } x \in \mathbb{R}^n$$

und es gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und die **Youngsche Ungleichung für Faltungen**

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. ... □

Glättung durch Faltung

Definition 11.3 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Träger von f ist

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Der Raum der Testfuntionen auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{ supp } \varphi \text{ kompakt}\}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass die Faltung mit einer Testfunktion glättet.

Satz 11.3 Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1,\infty]$ und $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha(\varphi * f) = D^\alpha \varphi * f$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Bemerkung 11.4 Ein Multiindex ist ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und wird bei Ableitungen eingesetzt. s ist $D^\alpha g := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} g$.

Beweis. Wegen dem kompakten Träger ist $D^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Aus Satz 11.2 folgt $D^\alpha \varphi(x - \cdot) f(\cdot) \in L^1$ für f.a. x. Aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz (genau aus Lemma 7.4) folgt, dass

$$D^\alpha(\varphi * f)(x) = D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \varphi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

und dass $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aus der Youngschen Ungleichung für Faltungen folgt

$$\|D^\alpha(\varphi * f)\|_{L^p} \leq \|D^\alpha \varphi\|_{L^1} \|f\|_{L^p} < \infty.$$

Also $D^\alpha(\varphi * f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

11.3 Approximation von $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Definition 11.5 (Approximation der Eins (Dirac-Folge)) Eine Folge $(\psi_k)_k \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt eine Approximation der Eins (AdE) (oft auch Dirac-Folge genannt), falls

(i) $\psi_k \geq 0$ f.ü., $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x) \, \mathrm{d}x = 1$ für alle k.

(ii) $\int_{|x| \geq r} \psi_k(x) \, \mathrm{d}x \to 0$ $(k \to \infty)$ für alle $r > 0$.

Satz 11.4 Sei $p \in [1,\infty)$. $(\psi_k)_k \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ sei eine AdE. Dann gilt

$$\psi_k * f \to f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \to \infty$$

für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. ... □

Bemerkung 11.6 Man kann sich fragen, ob es überhaupt welche AdEs gibt. Die Antwort ist positiv, da für ein beliebiges $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \, \mathrm{d}x = 1$ eine AdE durch $\psi_k(x) := k^n \psi(kx), k \in \mathbb{N}$ gegeben ist. Offenbar ist $\psi_k \geq 0$ und mit der Transformation $y = kx$ erhält man $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x) \, \mathrm{d}x = k^n \int_{\mathbb{R}^n} \psi(kx) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \, \mathrm{d}y = 1$. Außerdem

$$\int_{|x| \geq r} \psi_k(x) \, \mathrm{d}x = \int_{|\frac{y}{k}| \geq r} \psi(y) \, \mathrm{d}y = \int_{|y| \geq kr} \psi(y) \, \mathrm{d}y \to 0,$$

weil $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 11.7 (Friedrichs Mollifier) Wichtige AdEs sind die, die auch glatt sind. Auf englisch heißen sie "mollifiers". Eine typische $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ AdE wird konstruiert aus

$$\psi(x) := \begin{cases} c_n e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei c_n so gewählt wird, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}x =) \int_{B_1(0)} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Wir setzen dann

$$\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\psi(\tfrac{x}{\varepsilon})$$

und, z.B., mit $\varepsilon = k^{-1}$ erhälten wir die AdE $\psi_k(x) := \varphi_{k^{-1}}(x) = k^n\varphi(kx)$.

Es gilt $\text{supp}\varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Nach Satz 11.4 gilt $\varphi_\varepsilon * f \to f$ $(\varepsilon \to 0)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 11.4 ist $f_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$.

Wir sehen also, dass $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt, d.h. jede $L^p(\mathbb{R}^n)$-Funktion kann in L^p-Sinne durch eine $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$-Folge approximiert werden.

Es gilt sogar

Korollar 11.5 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Beweis. ... □

12 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation kann man verstehen als eine Zerlegung von kontinuierlichen Daten (von einer Funktion auf $\mathbb{R}^n$) in Sinus oder Kosinus-Wellen. Die Fourier-Transformation wird in vielen Bereichen angewandt, wie z.B. in der Signal-Verarbeitung, Bild-Verarbeitung, in PDEs in $\mathbb{R}^n$ und viel mehr.

Definition 12.1 Für komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist

$$L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \Re(f), \Im(f) \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, \infty]\}.$$

Definition 12.2 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Die Fourier-Transformation von f ist

$$\mathcal{F}f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ k \mapsto (\mathcal{F}f)(k) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}k\cdot x}\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Die kurze Notation ist $\widehat{f}(k) := \mathcal{F}f(k)$.

Satz 12.1 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Dann

1. $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $\sup_{k\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1}$
2. Falls $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, dann $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\widehat{g}$.
3. Falls $f \in C_0^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $< \alpha| \leq m$, dann

   $$\mathcal{F}(D^\alpha f)(k) = (\mathrm{i}k)^\alpha \widehat{f}(k)$$

   für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 < |\alpha| \leq m$ und es gibt ein $c > 0$, sodass $|\widehat{f}(k)| \leq c(1 + |k|)^{-m}$ $\forall k \in \mathbb{R}^n$-

4. Falls $x \mapsto |x|^m f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist, dann $\widehat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und

$$D^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}(pf),$$

wobei $p(x) = (-\mathrm{i}x)^\alpha$.

5. $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$.

Bemerkung 12.3 Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und ein $k \in \mathbb{R}^n$ ist $k^\alpha := k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_n^{\alpha_n}$.

Beweis. ... □

Lemma 12.2 Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k) g(k)\,\mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}^n} f(k)\widehat{g}(k)\,\mathrm{d}k$.

Beweis. ... □

Lemma 12.3 Für

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-|x|^2} \end{cases}$$

gilt $\widehat{\varphi}(k) = \pi^{n/2} e^{-\frac{|k|^2}{4}} (= \pi^{n/2}\varphi(k/2))$.

Beweis. ... □

Lemma 12.4 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), h \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ und $f_\varepsilon := \varepsilon^{-n} f(\varepsilon^{-1}\cdot)$. Dann gilt

(i) $\mathcal{F}(f(h - \cdot))(k) = e^{-\mathrm{i}k\cdot h}\widehat{f}(-k)$,

(ii) $\mathcal{F}(f(-\cdot))(k) = \widehat{f}(-k)$,

(iii) $\mathcal{F}(f_\varepsilon)(k) = \widehat{f}(\varepsilon k)$.

Beweis. ... □

Satz 12.5 (Inversionssatz) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ der Art, dass auch $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Dann gilt für f nach einer Abänderung der Werte auf einer Nullmenge, dass f stetig ist und

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}k\cdot x}\widehat{f}(k)\,\mathrm{d}k$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. ... □

Als nächstes möchten wir die Fourier-Transformation auch für $L^2(\mathbb{R}^n)$-Funktionen definieren. Dafür brauchen wir den

Satz 12.6 (Satz von Plancherel) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Dann ist $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. ... □

Für die Definition der Fourier-Transformation von $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ gehen, wie folgt, vor. Es gibt eine Folge $(f_k)_k \subset L^1 \cap L^2$ mit $f_k \to f$ in L^2 für $k \to \infty$, weil C_c^∞ dicht in L^2 liegt und $L^1 \cap L^2 \supset C_c^\infty$. Aus Satz 12.6 folgt

$$\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|f_m - f_n\|_{L^2}.$$

Da $(f_k)_k$ Cauchy ist (in L^2), ist auch $(\widehat{f}_k)_k$ Cauchy. Also ist $(\widehat{f}_k)_k$ konvergent. Wir nennen den Limes $\widehat{f}$.

13 Das Oberflächenintegral

Das Ziel ist die Integration von Funktionen definiert auf Oberflächen (genauer auf Untermannigfaltigkeiten). Zum Beispiel möchte man eine Funktion über die Sphere in $\mathbb{R}^3$ integrieren.

Definition 13.1 Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale Mannigfaltigkeit (UM) des $\mathbb{R}^n$, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to \Phi(U)$ gibt mit

$$\Phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}) \cap \Phi(U).$$

Die Existenz solches Diffeomorphismus bedeutet, dass M lokal wie ein flacher Unterraum aussieht, z.B. eine 2-dimensionale UM M in $\mathbb{R}^3$ kann in der Nähe von jedem $p \in M$ durch die Tangentenebene approximiert werden.

13.1 Flächeninhalt für parametrisierte Flächenstücke

Eine Pareametrisierung einer $n-$dimensionalen UM $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt das finden einer Funktion f (mit bestimmten Eigenschaften) von n Variablen, die M als Bild hat. Dies ist oft unmöglich und man kann M nur stückweise parametrisieren. In diesem Abschnitt definieren wir das Flächeninhalt für solche parametrisierte Flächenstücke.

Definition 13.2 Sie $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$.

(i) f heißt eine Immersion, falls $Df(x)$ maximalen Rang (d.h. n) hat für alle $x \in U$. Das heißt $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ ist injektiv.

(ii) Die Gramsche Metrik von f ist erzeugt durch $g(x) := Df(x)^T Df(x)$, d.h.

$$\mu_g(E) = \int_E Df(x)^T Df(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall E \subset \mathcal{B}(U).$$

(iii) $\det g = \det(Df^T Df) : U \to [0, \infty)$ heißt die Gramsche Determinante.

Bemerkung 13.3 • Immersionen werden später zum Parametrisieren von Flächen benutzt.

- g ist offenbar symmetrisch. Außerdem ist für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$v^T g(x) v = v^T Df(x)^T Df(x) v = |Df(x)v|^2 \geq 0.$$

Also ist $g(x)$ positiv semidefinit. Alle Eigenwerte $\lambda_j(x)$ sind also nichtnegativ und

$$\det g(x) = \Pi_{j=1}^n \lambda_j(x) \geq 0.$$

Definition 13.4 Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ eine Immersion und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $E \in \mathcal{B}(U)$ heißt

$$A_n(f, E) := \int_E \sqrt{\det g(x)} \, \mathrm{d}\lambda n(x)$$

der <u>$n-$dimensionale Flächeninhalt von f auf E.</u>

Beispiel 13.5 (Länge einer Kurve)

Wir wählen $n = 1$ und U ein Intervall. Eine Immersion $f \in C^1((a,b), \mathbb{R}^{1+k})$ ist also eine reguläre Kurve in $\mathbb{R}^{1+k}$. Für $t \in (a,b)$ ist $g(t) = |f'(t)|^2$ und $A_1(f,(a,b)) = \int_a^b |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$. Dies ist die uns schon bekannte Formel für die Kurvenlänge.

Beispiel 13.6 (Flächeninhalt der Einheitssphäre)

Wir wählen $n = 2$ und betrachten die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, also $\mathbb{S}^2 := \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Passende Parametriesirung sind die sphärischen Koordinaten (also Kugelkoordinaten mit $r = 1$):

$$f : (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3, f(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$f((0,\pi) \times (-\pi,\pi)) = \mathbb{S}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0, x_2 = 0\} =: \mathbb{S}^2 \setminus \Sigma_0.$$

Weil Σ_0 nur eine Kurve ist, erwarten wir, dass $A(\mathbb{S}^2) = A_2(f, (0,\pi) \times (-\pi,\pi))$.

Wir haben

$$Df(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

und $\det g = \sin^2\theta$. Es folgt

$$A_2(f, (0,\pi) \times (-\pi,\pi)) = \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = 4\pi.$$

Beispiel 13.7 (Graph einer $\mathbb{R}^k$-wertigen Funktion $u \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$)

Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+k}, x \mapsto (x, u(x))$. Das Bild von f ist also der Graph von u. Es ist

$$Df = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n \\ Du \end{pmatrix}, \; g = Df^T Df = \mathrm{Id}_n + Du^T Du.$$

Im Spezialfall von $k = 1$ ist

$$g(x) = \mathrm{Id}_n + \nabla u(x) \nabla u(x)^T.$$

Um $\det g(x)$ zu berechnen verwenden wir eine orthogonale Diagonalisierung von g - die gibt es wegen der Symmetrie von g. Also es gibt eine orthogonale Matrix Q, sodass

$$\widetilde{g} = Q^T g Q$$

diagonal ist. Weil $|\det Q| = 1$, ist $\det g = \det \widetilde{g}$. Durch eine Änderung der Basis, können wir die erste Spalte von Q als $(|\nabla u(x)|)^{-1}\nabla u(x)$ wählen. Also

$$Q = (E_1, E_2, \ldots, E_n), \text{ wobei } \nabla u(x) = E_1|\nabla u(x)|.$$

dann gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{g} &= Q^T g Q = Q^T I Q + Q^T \nabla u(x) \nabla u(x)^T Q = I + Q^T E_1 E_1^T Q |\nabla u(x)|^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 + |\nabla u(x)|^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also, $\det g = \det \widetilde{g} = 1 + |\nabla u|^2$ und $A_n(f, U) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, \mathrm{d}x$.

Lemma 13.1 (A_n ist unabhänging von einer Reparametrisierung) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n+k})$ eine Immersion, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorhismus. Dann ist auch $f \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion und

$$A_n(f, \Phi(E)) = A_n(f \circ \Phi, E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(U).$$

Beweis. ... □

13.2 Flächeninhalt von Untermannigfaltigkeiten

Lemma 13.2 (σ-Kompaktheit von UMen) Jede $n-$dimensionale UM M in $\mathbb{R}^{n+k}$ kann als abzählbare Vereinigung

$$M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$$

von kompakten Mengen $K_i \subset \mathbb{R}^{n+k}$ dargestellt werden.

(ohne Beweis)

Definition 13.8 Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine $n-$dimensionale UM. Eine lokale Parametrisierung ist eine injektive Immersion $f : \mathbb{R}^n \supset U \to M$ mit U offen.

Lemma 13.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale UM. Dann existieren offene Mengen $U_i, i = 1, 2, \ldots$ und lokale Parametrisierungen $f_i \in C^1(U_i, M)$, $i = 1, 2, \ldots$, sodass

$$M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(U_i).$$

Beweis. ... □

Definition 13.9 Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine $n-$dimensionale UM. $E \subset M$ heißt messbar, falls $f^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar ist (d.h. $f^{-1}(E) \in M_{(\lambda^n)^*}$) für jede lokale Parametrisierung $f : U \to M$.

Lemma 13.4 Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine $n-$dimensionale UM.

- $\mathcal{M} := \{E \subset M : E \text{ messbar}\}$ ist eine σ-Algebra.

- $\mathcal{B}(M) \subset \mathcal{M}$
- $\exists!$ Maß μ_M auf $\mathcal{M}$, sodass

$$\mu_M(E) = \int_{f^{-1}(E)} \sqrt{\det Df^T(x) Df(x)}\, \mathrm{d}x$$

für jede Parametrisierung $f : U \to M$ und jedes $E \subset f(U) \cap \mathcal{M}$.

Das Maß μ_M heißt das Flächenmaß von M.

Beweis. Im ersten Schritt beweist man, dass M geschrieben werden kann als $M = \cup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ mit $(M_i)_i$ paarweise disjunkt und sodass für jedes i es eine lokale Parametrisierung $f_i : U_i \to V_i$ mit U_i, V_i offen und $M_i \subset V_i$.

... □

Satz 13.5 Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine $n-$dimensionale UM, $M = \cup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ mit $(M_i)_i$ paarweise disjunkt, $M_i \subset V_i$ und wobei $f_i : U_i \to V_i$ lokale Parametrisierungen wie im Beweis von Lemma 13.4 sind. Sei $u : M \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $u \geq 0$ oder u bezüglich μ_M integrierbar. Dann gilt

$$\int_M u \,\mathrm{d}\mu_M = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(M_i)} u(f_i(x)) \sqrt{\det Df_i^T(x) Df_i(x)}\, \mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Beweis. ... □

Lemma 13.6 (Ähnlichkeitstransformation des Flächenmaßes) Sei $T : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}, y \mapsto Ty := \kappa Q(y+a)$, wobei $\kappa > 0, a \in \mathbb{R}^{n+k}$ und $Q \in \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ eine orthogonale Matrix ist (solches T heißt eine Ähnlichkeitstransformation). Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine $n-$dimensionale UM. Falls $U : T(M) \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu_{T(M)}$-messbar ist, dann ist $\mu \circ T$ μ_M-messbar und

$$\int_{T(M)} u(q) \,\mathrm{d}\mu_{T(M)}(q) = \kappa^n \int_M u(T(p)) \,\mathrm{d}\mu_M(p),$$

falls die Integrale existieren.

(ohne Beweis)

Satz 13.7 (Zwiebelformel) Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$, dann ist u für alle $r \in (0,\infty)$ auf $\partial B_r(0)$ integrierbar bezüglich $\mu_{\partial B_r(0)}$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u \,\mathrm{d}\lambda^{n+1} = \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} u \,\mathrm{d}\mu_{\partial B_r(0)} \,\mathrm{d}r = \int_0^\infty r^n \int_{\mathbb{S}^n} u(ry) \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}^n}(y) \,\mathrm{d}r,$$

wobei $\mathbb{S}^n = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Beweis. ... □

Beispiel 13.10 (Volumen und Flächeinhalt von $B_1^{n+1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$)

Sei $u := \chi_{B_1^{n+1}(0)}$.

$$\lambda^n(B_1^{n+1}(0)) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} u \,\mathrm{d}\lambda^{n+1} = \int_0^\infty r^n \int_{\mathbb{S}^n} \underbrace{u(rp)}_{=\chi_{[0,1)}(r)} \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}^n}(p) \,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^1 r^n \mu_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n) \,\mathrm{d}r = \frac{1}{n+1} \mu_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n).$$

Also $\mathrm{vol}(B_1^{n+1}(0)) = \frac{1}{n+1}\mathrm{Area}(\mathbb{S}^n)$. Zum Beispiel, $\mathrm{vol}(B_1^3(0)) = \frac{4}{3}\pi$ und $\mathrm{Area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.

14 Der Gaußsche Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz ist ein Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung auf mehrere Dimensionen. Für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ drückt er das Integral über $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Divergenz $\mathrm{div} f = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i$ als ein Flächenintegral über $\partial\Omega$.

Satz 14.1 (Partielle Integration) (i) Für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f, \partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $j = 1, \dots, n$ ist $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} f \, \mathrm{d}\lambda^n = 0$.

(ii) Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $fg, g\partial_{x_j} f, f\partial_{x_j} g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\partial_{x_j} f \, \mathrm{d}\lambda^n = -\int_{\mathbb{R}^n} f\partial_{x_j} g \, \mathrm{d}\lambda^n.$$

(ohne Beweis)

Definition 14.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω hat <u>C^1-Rand</u>, falls es für jedes $p \in \partial\Omega$ eine Rotation R, ein $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein $u \in C^1(U, I)$ gibt, sodass

$$R(p) \in U \times I \text{ und } R(\Omega) \cap (U \times I) = \{(y, r) \in U \times I : r < u(y)\}.$$

Ω mit einem C^1-Rand lässt sich also lokal als Subgraph schreiben.

Lemma 14.2 Sie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand $\partial\Omega$.Dann ist $\partial\Omega$ eine $(n-1)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 14.3 Sie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Es gibt ein $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, sodass für alle $p \in \partial\Omega$

- $\nu(p) \perp T_p\partial\Omega$ (wobei $T_p\partial\Omega$ der Tangentialraum zu $\partial\Omega$ im Punkt p ist)
- $|\nu(p)| = 1$
- $p + r\nu(p) \notin \Omega$ für alle $r > 0$ klein genug
- $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ ist stetig

(ohne Beweis)

Bemerkung 14.2 • Die Vektor-Funktion ν heißt die <u>äußere Normale</u> von Ω in $p \in \partial\Omega$.

- Mit U und I wie in Definition 14.1 mit $p = (y, u(y))$ ist

$$T_p\partial\Omega = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} e_1 \\ \nabla u(y) \cdot e_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_{n-1} \\ \nabla u(y) \cdot e_{n-1} \end{pmatrix}\right\},$$

wobei e_j der $j-$te kanonische Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist für $j = 1, \dots, n-1$. Es its also

$$\nu_\Omega(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u(y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 14.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand und $m \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$C^1(\overline{\Omega}) := \{f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : f \text{ und } \nabla f \text{ können stetig auf } \overline{\Omega} \text{ fortgesetzt werden}\}.$$

Lemma 14.4 (Spezialfall von Gauß) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und U, I wie in Definition 14.1 mit $I = (a, b)$. Falls $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ mit $\operatorname{supp}(f)$ kompakt in $U \times I$, dann

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, \mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}.$$

Beweis. ... □

Das letzte Lemma behandelt den Fall, wenn der Träger von f in einer Umgebung $U \times I$ liegt, wo Ω als Subgraph geschrieben wurde. Um diesen lokalen Fall auf ganzes Ω fortzusetzen brauchen wir

Lemma 14.5 (Teilung der Eins) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(A_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K (Indexmenge I beliebig). Dann existiert eine Teilung der Eins zu $(A_i)_i$, d.h. es gibt eine eindliche Indexmenge J und Funktionen $\vartheta_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0, \infty)), j \in J$, sodass

- $\sum_{j \in J} \vartheta_j(x) = 1 \ \forall x \in K$
- $\forall j \in J \exists i \in I : \operatorname{supp} \vartheta_j \subset A_i$

(ohne Beweis)

Satz 14.6 (Satz von Gauß) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, bechränkt mit C^1-Rand und sei $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, \mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}.$$

Beweis. ... □

Beispiel 14.4 Der Satz von Gauß ermöglicht die Berechnung von $\int_{\partial\Omega} h \, \mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}$ ohne das Flächemaß bestimmen zu müssen - falls h die Form $f \cdot \nu$ hat für ein $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Wir berechnen als Beispiel $I := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{3x_1^2 + 2x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}^2}$.

Weil $\nu_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, gilt $\frac{3x_1^2 + 2x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = f \cdot \nu_{\mathbb{S}^2}$ mit $f := \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$. Weil $\operatorname{div} f = 5$, folgt

$$I = \int_{B_1^3(0)} 5 \, \mathrm{d}\lambda^3 = 5 \operatorname{vol}(B_1^3(0)) = \frac{20}{3}\pi.$$

Beispiel 14.5 (Gauß für den Quader) Hier berechnen wir $\int_Q \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\lambda^2$ für einen Quader in $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential und Intergalrechung und des Satzes von Fubini. Wir erhalten damit einen Spezialfall des Satzes von Gauß.

Sei $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ und seien K_1, K_2, K_3, K_4 die Kanten von Q, wobei $K_1 = \{a_1\} \times (a_2, b_2)$ und die Enummerierung von K_j ist gegen den Uhrzeigersinn. Wir notieren, dass die äußere Nornmale gleich

$-e_1, -e_2, e_1$ und e_2 ist auf K_1, K_2, K_3 und K_4 (beziehungsweise). Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\lambda^2 &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \partial_{x_1} f_1(x_1,x_2) + \partial_{x_2} f_2(x_1,x_2) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f_1(b_1,x_2) - f_1(a_1,x_2) \, \mathrm{d}x_2 + \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1,b_2) - f_2(x_1,a_2) \, \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{K_3} f \cdot e_1 \, \mathrm{d}\mu_{\partial Q} + \int_{K_1} f \cdot (-e_1) \, \mathrm{d}\mu_{\partial Q} + \int_{K_4} f . e_2 \, \mathrm{d}\mu_{\partial Q} + \int_{K_2} f . (-e_2) \, \mathrm{d}\mu_{\partial Q} \\ &= \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu_\Omega \, \mathrm{d}\mu_{\partial\Omega},\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt gilt, weil die Eckpunkte eine Nullmenge auf ∂Q bilden.

Dass das Flächenmaß $\mathrm{d}\mu_{\partial Q}$ in den obigen Integralen richtig ist, ist einfach zu sehen. Zum Beispiel für K_1 ist eine lokale Parametrisierung $\varphi : (a_2, b_2) \to K_1, x_2 \mapsto (a_1, x_2)^T$. Also $D\varphi = (0,1)^T$ und $D\varphi^T D\varphi = 1$. Damit ist für eine (euf dem Rand messbare) Funktion u

$$\int_{K_1} u \, \mathrm{d}\mu_{\partial Q} = \int_{\varphi^{-1}(K_1)} u(\varphi(x_2)) \sqrt{\det D\varphi(x_2)^T D\varphi(x_2)} \, \mathrm{d}x_2 = \int_{a_2}^{b_2} u(a_1, x_2) \, \mathrm{d}x_2.$$

Korollar 14.7 (Greensche Formeln) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, bechränkt mit C^1-Rand.

(i) Falls $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, dann

$$\int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \nu_\Omega \, \mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}.$$

(ii) Falls $u, v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, dann

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \nu_\Omega \, \mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Satz von Gauß, weil in (i) $\operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$ und in (ii) $\operatorname{div}(u\nabla v - v\nabla u) = u\Delta v - v\Delta u$. □

— —

— —

— —

Literatur

[1] J. Elstrodt. Maß- und Integrationstheorie. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[2] O. Forster. Analysis 3. Springer-Spektrum, 2017.

[3] D. Werner. Einführung in die höhere Analysis. Springer-Lehrbuch. Physica-Verlag, 2006.