Übungsblatt 7

Abgabe: 13.7.2015; wird besprochen: in der Woche 13.7.2015 - 17.7.2015 (Termin gesucht!!)

Problem 1: Zeige, daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x+y) &= 0 \\ x - 2y + \cos(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$ eine Lösung $(x,y) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ besitzt.

Hinweis: Homotopie zum linearen Teil des Systems.

Problem 2: (Eigenwerte nichtlinearer Abbildungen) Sei $\Omega := B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $0 \notin f(\overline{\Omega})$.

Zeige: f besitzt einen positiven Eigenwert $\lambda > 0$ mit einem Eigenvektor in $\partial\Omega$, d.h.

$$\exists x \in \partial\Omega,\ \lambda > 0 : \quad f(x) = \lambda x$$

Analog finde auch einen negativen Eigenwert $\mu < 0$.

Problem 3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ und $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ mit $f(x, t+T) = f(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Betrachte das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= f(x,t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Sei f so, dass AWP eindeutig lösbar ist auf $[0,T]$ für jedes $x_0 \in \overline{\Omega}$ und die Lösung stetig von den Anfangsdaten x_0 abhängt.

Bezeichne mit $\phi(t; x_0)$ die Lösung $x(t)$ von AWP mit den Anfangsdaten x_0 (d.h. $t \mapsto \phi(t; x_0)$ ist die Lösungskurve, die in $t = 0$ durch x_0 läuft). Zeige, dass falls $f(x_0, 0) \neq 0$ für alle $x_0 \in \partial\Omega$ und falls Lösungskurven, die in $x_0 \in \partial\Omega$ starten, für $t \in (0,T]$ nicht zurück durch x_0 laufen, dann hat - **unter einer geeigneten topologischen Voraussetzung an** $f(\cdot, 0)$ - das AWP für ein $x_0 \in \Omega$ eine $T-$periodische Lösung.

Hinweis: Benutze $h(x_0, t) := \frac{1}{t}\left(\phi(t, x_0) - x_0\right)$ *als eine Homotopie.*

Problem 4: Löse Problem 4b aus Blatt 6 mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Schauder.