Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de
Qualitative Aspekte gewöhnlicher Differentialgleichungen SoSe 2014

Blatt 10

wird besprochen: 25.6.2014

Problem 1: Zeige, dass alle ω-Limes-Punkte und alle α-Limes-Punkte von Gradientensystemen kritische Punkte sind.

Hinweis: Wähle die (für Gradientensysteme) klassische Lyapunov-Funktion V und zeige, dass $\dot{V}(y) = 0$ falls y ein ω-Limes-Punkt ist.

Problem 2: Betrachte folgendes allgemeines Modell für nichtlineare Schwingungen mit Reibung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

mit $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $h(0,0) = 0$ und $h(x,0) \neq 0$ für $x \neq 0$.

(a) Zeige, dass falls $xh(x,0) > 0$ für $x \neq 0$ und $\partial_y h(x,y) > 0$ für $xy \neq 0$, dann ist $(0,0)$ ein asymptotisch stabiler kritischer Punkt des zugehörigen Systems ertser Ordnung.

Hinweis: Lyapunov-Funktion $V(x,y) = y^2/2 + \int_0^x h(s,0)ds$ und der Satz von LaSalle.

(b) Zeige, dass falls $\partial_y h(x,y) < 0$ für $xy \neq 0$, dann ist $(0,0)$ ein instabiler kritischer Punkt. Betrachte nur den Fall $h(x,0) < 0$ für $x \neq 0$. (Die Instabilität gilt aber eigentlich im allgemeinen unter der obigen Bedingung $h(x,0) \neq 0$ für $x \neq 0$.)

Hinweis: Die gleiche Funktion V wie in (a) und der Satz von Četaev-Krasovsky.

Problem 3: Betrachte die Van der Polsche Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Wende Problem 2 an und untersuche die Stabilität von $(0,0)$ im zugehörigen System erster Ordnung.

(b) Im Fall der asymptotischen Stabilität untersuche den Einzugsbereich von $(0,0)$.

Problem 4: Betrachte das autonome System $dx/dt = f(x)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und eine (messbare) Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ der Anfangsdaten. Sei ϕ_t der Fluss und zeige, dass

(a) $\frac{d}{dt}\mathrm{vol}(\phi_t(M)) = \int_{\phi_t(M)} \mathrm{trace} Df(x) dx$,

Hinweis: Zeige, dass vol$(\phi_t(M)) = \int_M |\det D_x\phi_t(x)| dx$ und dass $D_x\phi_t(x)$ ein Fundamenstalsystem der Linearisierung (des autonomen Systems) in $\phi_t(x)$ ist.

(b) für Hamiltonsche Systeme der Fluss volumenerhaltend ist, d.h. $\frac{d}{dt}\mathrm{vol}(\phi_t(M)) = 0$ für alle (messbare) $M \subset \mathbb{R}^n$.