IV. Parabolische Gleichungen

↳ ein Typ von Zeit-abhängigen Glen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T>0$ und $a: \underbrace{\Omega \times (0,T]}_{=\Omega_T} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b: \Omega_T \to \mathbb{R}^n$,

$c: \Omega_T \to \mathbb{R}$.

Betrachte $(Lu)(x,t) := -\sum a_{ij}(x,t)\,\partial_{ij} u(x,t) + \sum b_i(x,t)\,\partial_i u(x,t) + c(x,t)\,u(x,t)$

Def: Der Operator $\partial_t + L$ heißt gleichm. parabolisch auf Ω_T, falls L für jedes $[0,T]$ gleichm. elliptisch auf Ω ist (bzgl der Variable x), d.h. $\exists\, \gamma > 0$:
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,\xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall (x,t) \in \Omega_T$$

Bsp: $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b = c = 0$

$\Rightarrow \partial_t u + Lu = \partial_t u - \Delta u$, d.h. $\partial_t u + Lu = 0$ ist die Wärmeleitungsgleichung

IV.1 Wärmeleitungsgleichung (Darstellungsformeln)

Betrachte
$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), && x \in \Omega,\ t \in (0,\infty) \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in \Omega && (AB) \\ u(x,t) &= h(x,t), && x \in \partial\Omega,\ t > 0 && (RB) \end{aligned}$$

Bem: Falls $\Omega = \mathbb{R}^n$, dann entfällt (RB).

Def: Die Funktion $H: \begin{cases} \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{cases}$ heißt

der Wärmeleitungskern / die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgl.
Für $t \leq 0$ sei $H(x,t) := 0$.

Lemma 1 H erfüllt

(i) $\partial_t H - \Delta H = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(ii) $H(\cdot,t) \to \delta_0$ in $D'(\mathbb{R}^n)$ für $t \to 0$, sogar
$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x,t)\,\varphi(x)\,dx \overset{(t\to 0)}{\longrightarrow} \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n) := C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Bew: (i) $\nabla e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{1}{2t} x e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

$$\Delta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{4t^2}|x|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4t}} - \frac{n}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\partial_t \left(t^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) = -\frac{n}{2t}\left(t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) + \frac{|x|^2}{4t^2}\left(t^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)$$

$\Rightarrow (\partial_t - \Delta)\left(t^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) = 0$ für $t \neq 0$

(ii) 1) $\int_{\mathbb{R}^n} H(x,t)\,dx = 1 \quad \forall t > 0$ (direkte Rechnung mit Hilfe von

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i\right) = \pi^{n/2}$$)

2) Sei $(t_k)_k \subset \mathbb{R}$ mit $t_k \to 0$ und $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$.

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} H(x,t_k)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \overset{1)}{=} \left|\int H(x,t_k)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \dots\right|}_{=: a_1} + \underbrace{\left|\int_{B_\delta(0)} \dots\right|}_{=: a_2}$$

$a_2 \leq \sup_{x \in B_\delta(0)} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int_{\mathbb{R}^n} H(x,t_k)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$ für δ klein genug, da φ stetig

a_1: $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ fällt schnell ab für $t \to 0 \Rightarrow \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon,\delta) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} H(x,t_k)\,dx < \frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_\infty} \quad \text{für } k \geq k_0$$

$$a_1 \leq 2\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} H(x,t_k)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

∎

Homogenes Cauchy-Problem (hom. Anfangswertproblem)

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u && \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} (1)$$

Satz 2 Sei $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy$$

eine klassische Lsg von (1), d.h. $\partial_t u, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ (kurz $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$), $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ und es gilt (1).
Außerdem $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Bew: 1) Lsg-Eigenschaft, Glattheit auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

Sei $\tau > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (Multiindex)

- $|D_x^\alpha H(x-\cdot,t)| \le C_\tau P_\alpha(x-\cdot)\, e^{-\frac{|x-\cdot|^2}{4t}} \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \ge \tau$

  (P_α = Polynom Grades $|\alpha|$)

- $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow D_x^\alpha u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \qquad (*)$$

Analog $\partial_t^m u(x,t) = \int \partial_t^m H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy \quad \forall m \in \mathbb{N}$ — // — $\qquad (**)$

- $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \overset{(*),(**)}{\Longrightarrow} u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
- $(*), (**)$, Lemma 1 $\Rightarrow \partial_t u = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

2) AB und $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_k \to x_0$, $(t_k)_k \subset \mathbb{R}$ mit $t_k \to 0$

z.z. $u(x_k,t_k) \to u_0(x_0)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} H(x_k-y,t_k)\, u_0(y)\, dy - u_0(x_0) \right| \le \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} H(x_k-y,t_k)\,(u_0(y)-u_0(x_k))\, dy \right|}_{\substack{\to 0 \ (t_k \to 0) \\ \text{wie im Bew. von L. 1}}} + \underbrace{|u_0(x_k)-u_0(x_0)|}_{\substack{\to 0 \\ (x_k \to x_0) \\ \text{da } u_0 \text{ stetig}}}$$

∎

Inhomogenes Cauchy-Problem

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f & &\text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) & (a)\\ u(\cdot,0) &= u_0 & &\text{auf } \mathbb{R}^n & (b)\end{aligned}\right\} (2)$$

Lemma 3 $(\partial_t - \Delta) H = \delta_0$ in $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ (in δ_0 ist $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$)

Bew: Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $\delta > 0$.

$Q_{\delta,\tau} := B_\delta(0) \times (-\tau, \tau)$ (ein Zylinder in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$)

$$(\partial_t - \Delta) H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} H(-\partial_t - \Delta)\varphi = -\int_{Q_{\delta,\tau}} H(\partial_t + \Delta)\varphi - \int_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus Q_{\delta,\tau}} H\,(\partial_t + \Delta)\varphi$$

$$= \underbrace{-\int_{Q_{\delta,\tau}} H(\partial_t + \Delta)\varphi}_{=:I_1} + \int_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus Q_{\delta,\tau}} \varphi\, \overbrace{(\partial_t - \Delta H)}^{=0} + \underbrace{\int_{B_\delta} H\varphi\, dx \Big|_{t=-\tau}^{t=\tau}}_{=:I_2} - \underbrace{\int_{-\tau}^{\tau} \int_{\partial B_\delta} H\partial_\nu\varphi - \partial_\nu H\varphi}_{=:I_3}$$

z.z. $(\partial_t - \Delta) H(\varphi) = \varphi(0,0)$

sei $\varepsilon > 0$. z.z. $|(\partial_t - \Delta) H(\varphi) - \varphi(0,0)| < \varepsilon$

wähle z.B. $\delta = 1$.

$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$ für τ klein genug, da $(\partial_t + \Delta)\varphi$ beschränkt und

$\int_{\mathbb{R}^n} H(x,t)\,dx$ beschränkt $\forall t$.

I_3: $\exists K > 0$: $|H\partial_\nu\varphi - \partial_\nu H\varphi| \le K$ $\forall (x,t) \in \partial B_\delta \times \mathbb{R}$

(t klein ist kein Problem, da $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ schnell gegen 0 konvergiert für $t \to 0$ und $|x| = \delta$)

$\Rightarrow$ $|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}$ für τ klein genug

$$|I_2 - \varphi(0,0)| = \left|\int_{B_\delta} H(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx - \varphi(0,\tau)\right| + \underbrace{|\varphi(0,\tau) - \varphi(0,0)|}_{< \frac{\varepsilon}{6} \text{ für } \tau \text{ klein, da } \varphi \text{ stetig}}$$

$< \frac{\varepsilon}{3}$ nach L.1 (ii)

$\blacksquare$

Satz 4 Sei $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Dann erfüllt

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds \qquad (3)$$

Problem (2), wobei (2a) im distributionellen Sinne gilt, $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ und (2b) gilt punktweise.

Bew: Nach Satz 2 erfüllt erster Summand im klass. Sinne (2) mit $f \equiv 0$ und liegt in $C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

Wegen Linearität bleibt z.z. $u^{(2)}(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds$ erfüllt (2) mit $u_0 = 0$ distributionell und $u^{(2)} \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$

$H(\cdot, t-s) = 0$ für $s > t$ $\Rightarrow$ $u^{(2)}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} H(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, ds$

Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

$$(\partial_t - \Delta) u^{(2)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} u^{(2)} (-\partial_t - \Delta)\varphi\, dx\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} H(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, ds\, (-\partial_t - \Delta)\varphi(x,t)\, dx\, dt$$
(da $\varphi(x,t) = 0$ für $t \leq 0$)

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} H(x-y,t-s)(-\partial_t - \Delta)\varphi(x,t)\, dx\, dt}_{\overset{L.3}{=} \varphi(y,s)} f(y,s)\, dy\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} \varphi(y,s) f(y,s)\, dy\, ds =. f(\varphi) \qquad \checkmark$$

Noch z.z. $u^{(2)} \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ mit $u^{(2)}(\cdot, 0) \equiv 0$

- $u^{(2)} \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ offenbar
- $|u^{(2)}(x,t)| \leq t\, \|f\|_\infty \sup_{\tau > 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,\tau)\, dy}_{= 1 \ \forall \tau} \to 0 \qquad (t \to 0)$

$\Rightarrow u^{(2)}(\cdot, t) \rightrightarrows 0 \quad (t \to 0)$

$\blacksquare$

Bem: Falls $f \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C_b^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, dann ist (3) eine klassische $(C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)))$ Lsg.

Bew: Evans, §2.3 (nur für supp f kompakt)

Maximumprinzip für die Wärmeleit.-Gl. in $\mathbb{R}^n$

(& Ausbreitungsgeschwindigkeit & Eindeutigkeit)

Satz 5 Sei $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ und $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy$.

Dann gilt
$$\inf_{\mathbb{R}^n} u_0 \leq u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$
(schwaches Max-Prinz.)

Falls u_0 nicht konstant, dann
$$\inf_{\mathbb{R}^n} u_0 < u(x,t) < \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$
(starkes Max.-Prinz.)

Bew: Sei $M := \sup u_0$, $m := \inf u_0$

1) Da $H > 0$, gilt
$$m = m \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, dy \leq u(x,t) \leq M \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, dy = M \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

2) Falls u_0 nicht konst., dann analog
$$m < u(x,t) < M$$
∎

Korollar 6 Sei $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$. Dann ist $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)\, u_0(y)\, dy > 0$ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

(d.h. die Ausbreitungsgeschw. ist unendlich, da supp u_0 kpkt möglich)

Bew: Sei $u(x_0,t_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$. Dann $\inf u_0 = 0$ (schwaches M-P)

d.h. $u(x_0,t_0) = \inf u_0 \Rightarrow u_0$ konstant $\Rightarrow u_0 \equiv 0 \rightarrow\leftarrow$

∎

<u>Bem:</u> Das Maximumprinzip gilt in $\mathbb{R}^n$ <u>nicht für jede Lsg</u> von

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sondern nur für die Lsgen mit einer Wachstumschranke.
(Es gibt unendlich viele klass. Lsgen zum gleichen u_0, cf. John, PDEs)

<u>Satz 7</u> (Maximum-Prinzip in $\mathbb{R}^n$)

Sei $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lsg von (4). Falls

$$\exists\, \alpha, \beta > 0: \quad u(x,t) \leq \beta e^{\alpha |x|^2} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T], \qquad \left(\begin{matrix}\text{Wachstumschranke}\\ \text{WS}\end{matrix}\right)$$

dann

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T)} u = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 .$$

<u>Bew:</u> (kommt nach dem Max-Prinzip auf Ω beschränkt.)

<u>Korollar 8</u> Sei $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, $T>0$. Dann existiert höchstens eine Lsg $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ von (4) welche (WS) erfüllt.

<u>Bew:</u> Sei v die Differenz von zwei solcher Lsgen.

$$\left.\begin{aligned} \partial_t v &= \Delta v && \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ v(\cdot,0) &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \overset{S.7}{\Longrightarrow} \begin{aligned} &\sup v \leq 0 \\ &\sup(-v) \leq 0 \end{aligned} \Rightarrow v \equiv 0$$

$\blacksquare$

IV.2 Maximum-Prinzipien für parabolische Probleme

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Sei } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, beschränkt}, \ T>0. \\
&\Omega_T := \Omega \times (0,T] \qquad (\text{parabolischer Zylinder}) = \text{Kaffe \& Deckel} \\
&\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T \qquad (\text{— '' — Rand}) = \text{Tasse} \\
&Lu := -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i\, \partial_i u + c\, u \\
&\text{mit} \quad a_{ij} \in C(\Omega_T, \mathbb{R}^{n\times n}),\ a_{ij} \geq 0 \ (\text{OBdA } A \text{ symmetrisch}) \\
&\qquad b \in C(\Omega_T, \mathbb{R}^n),\ c \in C(\Omega_T, \mathbb{R}) \\
&\text{und} \quad \partial_t + L \text{ gleichm. parabolisch.}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Satz 9 (Max.-Prinzip für $c \equiv 0$)

Gelte 15) und $c \equiv 0$. Falls $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$

$$\partial_t u + Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T$$

erfüllt, dann

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u .$$

Bew.: a) sei erst $\partial_t u + Lu < 0$ in Ω_T

Angenommen $\exists (x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit $u(x_0,t_0) = \max\limits_{\overline{\Omega_T}} u$.

Dann 1) $\partial_t u(x_0,t_0) \geq 0$ ($=0$ falls $t_0 < T$, ≥ 0 falls $t_0 = T$)

2) $\nabla u(x_0,t_0) = 0$ und $\sum a_{ij}(x_0,t_0)\partial_{ij} u(x_0,t_0) \leq 0$
(cf. Bew. von S. III.29 = schwaches M.P. für ellip. Gl.)

$\Rightarrow (\partial_t u + Lu)(x_0,t_0) \geq 0 \quad \rightarrow\leftarrow$

b) Sei $\partial_t u + Lu \leq 0$ in Ω_T

Betrachte $u^\varepsilon(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t$ mit $\varepsilon > 0$.

$\partial_t u^\varepsilon + L u^\varepsilon \leq -\varepsilon < 0 \quad \Rightarrow \max\limits_{\overline{\Omega_T}} u^\varepsilon = \max\limits_{\Gamma_T} u^\varepsilon \leq \max\limits_{\Gamma_T} u$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Beh. ∎

Bew. von Satz 7:

Idee: - zeige die Beh. auf $(0,\tau)$ mit τ klein, $\tau = \tau(\alpha)$ aber $\tau \neq \tau(u_0)$.
- dann iteriere bis zur Zeit T

1) wähle $\tau \in \left(0, \min\left(T, \frac{1}{4\alpha}\right)\right)$, $\varepsilon > 0$ mit $4\alpha(\tau+\varepsilon) < 1$,
$y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu > 0$.

Definiere

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(\tau+\varepsilon-t)^{n/2}} \, e^{\frac{|x-y|^2}{4(\tau+\varepsilon-t)}}$$

v löst $\partial_t v - \Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\tau]$ $\quad \left(t \in (0,\tau] \Rightarrow \tau+\varepsilon-t > 0 \right)$

Sei $\Omega := B_r(y)$ mit $r>0$ beliebig (y ist fest)

Satz 9 $\Rightarrow$ $\max_{\overline{\Omega_\tau}} V = \max_{\overline{\Gamma_\tau}} V$

2) $v(x,0) \leq u(x,0) = u_0(x)$

Für $x \in \partial B_r(y)$, $t \in [0,\tau]$ ist

$$v(x,t) \leq \beta e^{\alpha |x|^2} - \frac{\mu}{(\tau+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(\tau+\varepsilon)}}$$

$$\leq \beta e^{\alpha(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(\tau+\varepsilon)^{n/2}} e^{r^2(\alpha+\gamma)}$$

wobei $\gamma = \frac{1}{4(\tau+\varepsilon)} - \alpha > 0$.

Also $v(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 \quad \forall x \in \partial B_r(y), t \in [0,\tau]$ für r hinreich. groß.

(da $e^{r^2(\alpha+\gamma)} \gg e^{\alpha(|y|+r)^2}$ für r groß)

S.9.
$\Rightarrow$ $v(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 \quad \forall x \in \overline{B_r(y)}, t \in [0,\tau]$

$\Rightarrow$ —— // —— $\forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,\tau]$

μ beliebig klein $\Rightarrow$ $u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,\tau]$

3) Iteration

$u_1(x,t) := u(x,t+\tau)$

$u_1(x,0) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 \Rightarrow u_1(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0 \quad \forall t \in [0, \min(\tau, T-\tau)]$

d.h. $u(x,t) \leq$ — // — $\forall t \in [0, \min(2\tau, T)]$

usw bis $[0,T]$. ∎

<u>Satz 10</u> Gelte (5), $c \equiv 0$ und sei $u_0 \in C(\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega \times (0,T))$ und $f \in C(\Omega_T)$. Es gibt höchstens eine Lsg $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ von

$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu &= f && \text{in } \Omega_T \\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{in } \Omega \\ u &= h && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T]. \end{aligned}$$

<u>Bew</u>: a) Seien $u, \tilde{u}$ zwei solche Lsgen, $v := u - \tilde{u}$

$$\begin{aligned} \partial_t v + Lv &= 0 && \text{in } \Omega_T \\ v(\cdot,0) &= 0 && \text{in } \Omega \\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T] \end{aligned}$$

S.g. $\Rightarrow \max\limits_{\overline{\Omega_T}} v = \max\limits_{\Pi_T} v = 0$

$\Rightarrow u \leq \tilde{u}$

b) sei $v := \tilde{u} - u \quad \Rightarrow \tilde{u} \leq u$ $\blacksquare$

<u>Satz 11</u> (Maximumprinzip mit $c \not\equiv 0$)

Gelte (5) und sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$.

(i) Falls $c \geq 0$ in Ω_T und $\partial_t u + Lu \leq 0$ in Ω_T, dann

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\Pi_T} u_+$$

(ii) Falls $c \geq 0$ in Ω_T und $\partial_t u + Lu \geq 0$ in Ω_T, dann

$$\min_{\overline{\Omega_T}} u \geq -\max_{\Pi_T} u_-$$

(iii) Falls $c \geq -\Lambda$ in Ω_T mit einem $\Lambda > 0$, und $\partial_t u + Lu \leq 0$ in Ω_T und $u \leq 0$ auf Π_T, dann $u \leq 0$ in Ω_T.

<u>Bew</u>: (i) angenommen u nimmt ein positives Maximum in Ω_T an

$\Rightarrow$ auch $u_\varepsilon := u - \varepsilon t$ nimmt für $\varepsilon > 0$ klein genug ein positives Max. in einem $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ an

- $\partial_t u_\varepsilon + L u_\varepsilon < 0$ in Ω_T aber in $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ ist

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t u_\varepsilon (x_0,t_0) \geq 0 \\ -\sum a_{ij}(x_0,t_0)\, \partial_{ij} u_\varepsilon (x_0,t_0) \geq 0 \\ \nabla u_\varepsilon (x_0,t_0) = 0 \\ c(x_0,t_0)\, u_\varepsilon (x_0,t_0) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\partial_t u_\varepsilon + L u_\varepsilon)(x_0,t_0) \geq 0 \quad \rightarrow \leftarrow$$

(ii) folgt mit (i) angewandt an $-u$

$$-\min_{\Omega_T} u = \max_{\Omega_T} (-u) \leq \max_{\Gamma_T} (-u)_+ = \max_{\Gamma_T} \max\{-u,0\} = \max_{\Gamma_T} (-\min\{u,0\})$$
$$= \max_{\Gamma_T} u_-$$

(iii) Übung

<u>Satz 12</u> (starkes Max-Prinzip für $c \geq 0$)
Gelte (5), $\|A,b,c\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \Lambda$ mit $\Lambda > 0$, $c \geq 0$ und sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$.
Sei weiter Ω zusammenhängend.

(i) Falls $\partial_t u + Lu \leq 0$ in Ω_T und
$$0 \leq u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u \quad \text{mit } (x_0,t_0) \in \Omega_T,$$
dann ist $u \equiv \text{const.}$ in Ω_{t_0}.

(ii) Falls $\partial_t u + Lu \geq 0$ in Ω_T und
$$0 \geq u(x_0,t_0) = \min_{\overline{\Omega_T}} u \quad \text{mit } (x_0,t_0) \in \Omega_T,$$
dann ist $u \equiv \text{const.}$ in Ω_{t_0}.

<u>Bew</u>: [Evans, § 7.2]

IV. 3 Bochnerräume

Motivation: schwache Formulierung von parabolischen Gleichungen

Sei erst u eine glatte Lsg von

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_t u + Lu = f & \text{in } \Omega_T \\ u(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \end{array}\right\} \quad (6)$$

mit Ω_T wie in (5) aber

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i (a_{ij} \partial_j u) + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu$$

(L ist in Divergenzform)

mit $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega_T)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,\dots n$
und $f \in L^2(\Omega_T)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\xi^T A(x,t)\xi \geq \theta|\xi|^2 \ \forall (x,t) \in \Omega_T, \xi \in \mathbb{R}^n$

Teste (6) mit $v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \partial_t u(x,t)\, v(x)\, dx + B(u(\cdot,t), v; t) = \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, dx, \qquad (7)$$

wobei $B(\varphi,\psi;t) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\, \partial_j \varphi(x)\, \partial_i \psi(x)\, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega b_j(x,t)\, \partial_j \varphi(x)\, \psi(x)\, dx$

$$+ \int_\Omega c(x,t)\, \varphi(x)\, \psi(x)\, dx$$

Zur schwachen Lsg:

- betrachte u als:

$$u: \begin{cases} [0,T] \to H_0^1(\Omega) \\ t \mapsto [u(t)](x) := u(x,t) \end{cases}, \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T]$$

(d.h. Abbildung in einen Banachraum)

- analog: $f: [0,T] \to L^2(\Omega)$
- (7) ist jetzt

$$(\partial_t u(t), v)_{L^2(\Omega)} + B(u(t), v; t) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}$$

- Sei $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ für f.a. $t \in [0,T]$.
  ↳ aus $\partial_t u(t) = f(t) - Lu(t)$ und $Lu \in H^{-1}(\Omega)$ folgt $\partial_t u(t) \in H^{-1}(\Omega)$ für f.a. $t \in [0,T]$

Def: u heißt eine schwache Lsg von (6), falls
$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, es gilt

$$(\partial_t u(t))(v) + B(u(t), v; t) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und fast alle $t \in [0,T]$ und $u(0) = u_0$.

üblichere Notation: $\langle \partial_t u(t), v\rangle := (\partial_t u(t))(v)$

Bem: Später zeigen wir:

$$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \Rightarrow u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$$

Also die Punktauswertung $u(0)$ macht Sinn.

Was ist genau $L^p(0,T;X)$ mit einem Banachraum X?

Def: (stark messbare Fkt)

1) Sei X ein Banachraum und $T>0$. $v:[0,T]\to X$ heißt eine <u>einfache Fkt</u>, falls v endlich viele Werte hat, d.h.

$$v(t)=\sum_{j=1}^{m}\chi_{E_j}(t)\,\psi_j \qquad \forall t\in[0,T] \quad \text{mit } m\in\mathbb{N},$$

$E_j\subset[0,T]$ $\forall j$ sind Lebesgue-messbare disjunkte Mengen.

2) $u:[0,T]\to X$ heißt <u>stark messbar</u>, falls $\exists\,(u_k)_k$ mit $u_k:[0,T]\to X$ einfach $\forall k$ und $u_k(t)\to u(t)$ in X für f.a. $t\in[0,T]$.

<u>Satz 13</u> (Pettis)

Sei X separabel (hat eine abzählbare dichte Teilmenge), $u:[0,T]\to X$. Falls $f(u):[0,T]\to\mathbb{R}$ ist für jedes $f\in X'$ Lebesgue-messbar, dann ist u stark messbar.

<u>Bew</u>: [Yosida, Funktionalana.]

Def (Bochner-Raum)

Sei X ein Banachraum, $T>0$, $p\in[1,\infty)$.

$$L^p(0,T;X):=\left\{u:[0,T]\to X \text{ stark messbar mit } \|u\|_{L^p(0,T;X)}:=\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}<\infty\right\}$$

Def. (Integration im Banachraum X)

Für $v:[0,T]\to X$ einfach ist $\int_0^T v(t)\,dt:=\int_0^T\sum_{j=1}^{m}\chi_{E_j}(t)\,\psi_j\,dt:=\sum_{j=1}^{m}|E_j|\,\psi_j\in X$.

<u>Lemma 14</u> (Lebesgue Majoris. konvergenz in L^p)

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ beschränkt, $p\in[1,\infty)$, $u_k,u,f:\Omega\to\mathbb{R}$ und gelte

$$u_k\to u \quad \text{punktweise f.ü.}$$
$$|u_k|\le f \quad \text{mit } f\in L^p(\Omega).$$

Dann $u_k\to u$ in $L^p(\Omega)$ (und also $u\in L^p(\Omega)$)

<u>Bew</u>: $|u_k-u|^p\to 0$ punktweise f.ü., $|u_k-u|^p\le(2f)^p\in L^1(\Omega)$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{\underset{\text{in } L^1}{\Longrightarrow}}\int_\Omega|u_k-u|^p\to 0$$

$\boxtimes$

Notation: Für $v: \begin{cases} [0,T] \to X \\ t \mapsto v(t) \end{cases}$ (X Banachraum) und $f \in X'$ ist

1) $\|v(\cdot)\|_X$ die Funktion $t \longmapsto \|v(t)\|_X$

2) $f(v(\cdot))$ —"— $t \longmapsto f(v(t))$

Satz 15 (Bochner)

Sei X ein Banachraum, $p \in [1,\infty)$, $T > 0$. Dann ist $L^p(0,T;X)$ ein Banachraum und

(i) $\forall u \in L^p(0,T;X)$ $\exists (u_k)_k$ mit u_k einfach für jedes k und $u_k : [0,T] \to X$ mit $u_k(t) \to u(t)$ in X für f.a. $t \in [0,T]$

und $$\int_0^T \|u_k(t) - u(t)\|_X^p \, dt \to 0.$$

(ii) Sei $u \in L^p(0,T;X)$ und $(u_k)_k$ wie in (i). Dann ist
$$\int_0^T u(t)\,dt := \lim_{k\to\infty} \int_0^T u_k(t)\,dt \in X \qquad \text{(Bochner-Integral)}$$
wohl definiert (d.h. das Limes existiert und ist unabh. von der Wahl der Folge)

(iii) $$\left\| \int_0^T u(t)\,dt \right\|_X \le \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt \qquad (a)$$
$$f\left(\int_0^T u(t)\,dt\right) = \int_0^T f(u(t))\,dt \quad \forall f \in X' \qquad (b)$$

(iv) (Lebesgue Konvergenzsatz)

Seien $(u_k)_k \subset L^p(0,T;X)$, $(g_k)_k \subset L^p(0,T;\mathbb{R})$

Falls $\left.\begin{cases} u_k(t) \to u(t) \text{ in } X \text{ für f.a. } t \\ \|u_k(t)\|_X \le g_k(t) \text{ für f.a. } t \\ g_k \to g \text{ in } L^p(0,T;\mathbb{R}) \end{cases}\right\}$, dann $u_k \to u$ in $L^p(0,T;X)$ und $u \in L^p(0,T;X)$.

Bew: (i) u stark messbar $\Rightarrow$ $\exists (\tilde{u}_k)_k$ mit $\tilde{u}_k(t) \to u(t)$ in X für f.a. t

$$u_k(t) := \begin{cases} \tilde{u}_k(t), & \text{falls } \|\tilde{u}_k(t)\|_X \le 2\|u(t)\|_X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann $\left.\begin{array}{l} \|u_k(t) - u(t)\|_X \le 3\|u(t)\|_X \\ 3\|u(\cdot)\|_X \in L^p(0,T;\mathbb{R}) \\ u_k(t) \to u(t) \text{ in } X \text{ für f.a. } t \end{array}\right\} \overset{\text{L. 14}}{\Rightarrow} \|u_k(\cdot) - u(\cdot)\|_X \to 0$ in $L^p(0,T;\mathbb{R})$

(ii) $\left\| \int_0^T u_k(t)\,dt \right\|_X \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j=1}^{m(k)} |E_{kj}| \, \|\psi_{kj}\|_X = \int_0^T \|u_k(t)\|_X \, dt$ (*)

$\Rightarrow \left\| \int_0^T u_k - \int_0^T u_l \right\|_X \leq \int_0^T \|u_k - u_l\|_X \leq \int_0^T \|u_k - u\|_X + \int_0^T \|u_l - u\|_X$ (**)

$\overset{\text{Hölder}}{\leq} T \left[\left(\int_0^T \|u_k - u\|_X^p \right)^{1/p} + \left(\int_0^T \|u_l - u\|_X^p \right)^{1/p} \right] \overset{(i)}{\rightarrow} 0$

d.h. $\left(\int_0^T u_k \right)_k$ ist Cauchy-Folge in X $\Rightarrow$ Limes existiert

Nach (**) ist der Limes unabhängig von der Wahl der Folge.

(iii) Mit $\lim_{k\to\infty}$ (*) erhalte (iii-a)

(iii-b): • $f\left(\int_0^T u_k\right) \rightarrow f\left(\int_0^T u\right)$ wegen (ii) (f stetig)

• $f\left(\int_0^T u_k\right) \overset{u_k \text{ einfach}}{=} \sum_{j=1}^{m(k)} |E_{kj}| \, f(\psi_{kj}) = \int_0^T f(u_k)$

$\rightarrow \int_0^T f(u)$ da $u_k(t) \rightarrow u(t)$ in X für f.a. t

$\Rightarrow$ (iii-b)

(IV) (nur für X separabel)

Sei $f \in X'$ beliebig.

$f(u_k(\cdot))$ ist messbar
$f(u(\cdot))$ ist die Grenzfkt (punktweise f.ü.) $\Big\} \Rightarrow f(u(\cdot))$ messbar

$\overset{\text{S. 13}}{\Rightarrow}$ u stark messbar

• $\|u_k(\cdot)\|_X \rightarrow \|u(\cdot)\|_X$ punktweise f.ü. (da $u_k(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$ in X pktweise f.ü.)

• $\|u_k(t)\|_X \leq g_k(t)$ für f.a. t
($\leq 2g(t)$ für k groß)

$\overset{\text{L. 14}}{\Rightarrow} \|u(\cdot)\|_X \in L^p(0,T;\mathbb{R})$
$\Rightarrow u \in L^p(0,T;X)$

z.z. $u_k \rightarrow u$ in $L^p(0,T;X)$

• $\|(u_k - u)(\cdot)\|_X \rightarrow 0$ punktweise f.ü.

• $\|(u_k - u)(\cdot)\|_X \leq g_k + \|u(\cdot)\|_X \in L^p(0,T;\mathbb{R})$

$\overset{\text{L. 14}}{\Rightarrow} \|(u_k - u)(\cdot)\|_X \rightarrow 0$ in $L^p(0,T;\mathbb{R})$

d.h. $u_k \rightarrow u$ in $L^p(0,T;X)$

Noch z.z. $L^p(0,T;X)$ ist Banachraum

- Vektorraum & Normeigenschaften: Übung
- Vollständigkeit: sei $(u_k)_k$ Cauchy in $L^p(0,T;X)$, d.h.

$$\int_0^T \|(u_k - u_l)(t)\|_X^p \, dt \to 0 \qquad (k,l \to \infty)$$

Für eine TF: $\int_0^T \|(u_k - u_l)(t)\|_X^p \, dt \le 2^{-kp} \qquad \forall\, l \ge k$

I) Sei $U_N := \|u_1\|_X + \sum_{j=1}^N \|u_{j+1} - u_j\|_X \in L^p(0,T;\mathbb{R})$

1) $(U_N)_N$ ist beschr. in $L^p(0,T;\mathbb{R})$, da $\|U_N\|_{L^p(0,T)} \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \underbrace{\left(\int_0^T \|u_1\|_X^p\right)^{1/p}}_{=:c_1} + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^T \|u_{j+1} - u_j\|_X^p\right)^{1/p}$

$$\le c_1 + \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} \le c_1 + 1$$

2) $(U_N(t))_N$ mon. wachsend und beschr. in $\mathbb{R}$ für f.a. t $\Rightarrow$ $U_N(t) \to U(t) \in \mathbb{R}$ für f.a. t

1), 2) $\overset{(IV)}{\underset{(\text{mit } X=\mathbb{R})}{\Longrightarrow}}$ $U_N \to U$ in $L^p(0,T;\mathbb{R})$

II) Sei t ein Pkt wo $U_N(t) \to U(t)$

- $u_N(t) = u_1(t) + \sum_{j=1}^N (u_j - u_{j-1})(t)$
- $(U_N(t))_N$ Cauchy in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $(u_N(t))_N$ Cauchy in X,

 weil $\|u_N(t) - u_M(t)\|_X = \left\|\sum_{j=M+1}^N (u_j - u_{j-1})(t)\right\|_X \le |U_N(t) - U_M(t)|$

 Also $u_N(t) \to u(t) \in X$. (*)

- $\|u_N(t)\|_X \le U_N(t)$ ($U_N(t)$ ist eine konvergente Majorante) (**)

(*), (**) $\overset{(IV)}{\Longrightarrow}$ $u \in L^p(0,T;X)$, $u_N \to u$ in $L^p(0,T;X)$

z.z.: $u_N \to u$ gilt für die <u>ganze</u> Cauchy-Folge

Sei $(\tilde{u}_k)_k$ die obige TF

$$\|u_N - u\|_{L^p(0,T;X)} \le \underbrace{\|u_N - \tilde{u}_k\|}_{\substack{\to 0 \\ \text{da } (u_N)_N \text{ Cauchy}}} + \underbrace{\|\tilde{u}_k - u\|}_{\to 0 \text{ wie gezeigt}}$$

$\blacksquare$

Def: Ein normierter Raum heißt <u>reflexiv</u>, falls $X'' := (X')'$ isometrisch isomorph zu X ist (man schreibt $X'' \cong X$)

Bem: • X'' = stetige lin. Funktionale (slF) auf X'

• $\forall u \in X$ ist $X' \ni f \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ ein slF auf X'

Im reflexiven Raum haben alle Elemente aus X'' diese Form.

Bsp: 1) jeder Hilbertraum H ist reflexiv (da $H' \cong H$ nach Riesz)

2) $(L^p(\Omega))' \cong L^{p'}(\Omega) \Rightarrow (L^p(\Omega))'' = L^p(\Omega)$ $\quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

Lemma 16 (Dualraum zum Bochnerraum $L^p(0,T;X)$)

Sei X ein Banachraum, $T > 0$, $p \in [1,\infty)$. Falls X reflexiv, dann ist

$$L^p(0,T;X)' = L^{p'}(0,T;X'), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Die Wirkung von $v \in L^{p'}(0,T;X')$ auf $u \in L^p(0,T;X)$ ist

$$v(u) := \int_0^T \underbrace{v(t)}_{\in X'} \big(\underbrace{u(t)}_{\in X}\big)\, dt.$$

Bew: [Schweizer, PDGl, Propos. 10.5]

Bem: $L^p(0,T,X)$ ist reflexiv für X reflexiv.

Satz 17 Falls $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ und $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, dann

(i) $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$

(ii) $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ ist schwach diffbar und
$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2} = 2(\partial_t u(t))(u(t))$ für f.a. $t \in [0,T]$.

(iii) $$\max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right)$$

Bew: Sei $\tilde{u}(t) := \begin{cases} u(t), & t \in (0,T) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (0,T) \end{cases}$ (Erweiterung auf $\mathbb{R}$)

$\tilde{u}_\varepsilon := \rho_\varepsilon * \tilde{u}$ (Glättung mit Glättungskern ρ_ε)

Es gilt:

- $\tilde{u}_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$
- (7) $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ in $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$
- (8) $\partial_t \tilde{u}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \partial_t u \to \partial_t u$ in $L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$
- $\tilde{u}_\varepsilon(t) \to u(t)$ in $H_0^1(\Omega)$ für f.a. $t \in [0,T]$

Bew: [Schweizer, Satz 10.9]

$$(\tilde{u}_\varepsilon(t), \tilde{u}_\varepsilon(t))_{L^2} = \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt}(\tilde{u}_\varepsilon(s), \tilde{u}_\varepsilon(s))_{L^2}\, ds = 2\int_{-\infty}^t (\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(s), \tilde{u}_\varepsilon(s))_{L^2}\, ds \qquad (9)$$

↳ wende auf $\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\delta$ an:

$$\|\tilde{u}_\varepsilon(t) - \tilde{u}_\delta(t)\|_{L^2}^2 = 2\int_{-\infty}^t (\partial_t(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\delta)(s), (\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\delta)(s))_{L^2}\, ds$$

$$\leq 2 \int_{-\infty}^\infty \|\partial_t(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\delta)(s)\|_{H^{-1}} \|(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\delta)(s)\|_{H^1}\, ds \qquad (10)$$

→ verstehe $\partial_t \tilde{u}_{\varepsilon,\delta}$ als Elemente von H^{-1}

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} 2 \|\partial_t \tilde{u}_\varepsilon - \partial_t \tilde{u}_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{-1})} \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}, H^1)} \qquad (11)$$

(7) $\Rightarrow$ $(\tilde{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ Cauchy in $L^2(0,T; H_0^1)$

(8) $\Rightarrow$ $(\partial_t \tilde{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ —"— $L^2(0,T; H^{-1})$

$\overset{(11)}{\Longrightarrow}$ $(\tilde{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ Cauchy in $C_c(\mathbb{R}; L^2)$

Also $\tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow[\text{auf } [0,T]]{\text{glchm.}} v \in C([0,T], L^2)$.

Habe auch: $\tilde{u}_\varepsilon(t) \to u(t)$ in H_0^1 für f.a. t

$\Rightarrow v = u$ (nach Umdefinieren auf Menge des Maßes Null)

Mit $\varepsilon \to 0+$ in (9) (und $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ in $C([0,T], L^2)$):

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\int_{-\infty}^t \partial_t u(s)(u(s))\, ds \qquad (12)$$

$$\|u(0)\|_{L^2}^2 = 2\int_{-\infty}^0 \partial_t u(s)(u(s))\, ds$$

(Limes im Integral ok: L^1-Majorante für $(\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(s), \tilde{u}_\varepsilon(s))_{L^2}$ ist $\|\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(s)\|_{H^{-1}} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1}$ wie in (10))

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(0)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \partial_t u(s)(u(s))\, ds \qquad (13)$$

(d.h. $\|u(\cdot)\|_{L^2}^2$ ist absolut stetig auf $[0,T]$ – da $\partial_t u(\cdot)(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$)

$(13) \Rightarrow \quad \|u(\cdot)\|_{L^2}^2 \in W^{1,1}(0,T)$ mit $\frac{d}{dt}\|u(\cdot)\|_{L^2}^2 = 2(\partial_t u(t))(u(t))$

$\Rightarrow$ (ii)

(iii): Aus (12) folgt

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(\tau)\|_{L^2}^2 + 2\int_\tau^t \partial_t u(s)(u(s))\,ds \quad , \; 0 \le t,\tau \le T$$
$$\le \|u(\tau)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \|\partial_t u(s)\|_{H^{-1}} \|u(s)\|_{H^1}\,ds$$
$$\le \|u(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;H^1)}^2$$

Wähle $\tau \in [0,t]$ s.d. $\|u(\tau)\|_{L^2}^2 = \min\limits_{[0,T]} \|u(\cdot)\|_{L^2}^2$.

Dann $\|u(\tau)\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_{L^2}^2\,ds = \frac{1}{T}\|u\|_{L^2(0,T,L^2)}^2 \le \frac{1}{T}\|u\|_{L^2(0,T;H^1)}^2$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2} \le C\left(\|\partial_t u\|_{L^2(0,T;H^{-1})} + \|u\|_{L^2(0,T;H^1)}\right)$$

∎

IV.4 Existenz einer schwachen Lsg

Verfahren 1) Galerkin Approximation: Projektion der Gl. auf ein endlich-dim. Unterraum $X_N \subset H_0^1(\Omega)$, $\dim X = N$

$\rightsquigarrow$ System von N ODEs für die N Koeffizienten

$\rightsquigarrow$ approximative Lsg $u_N : [0,T] \to X_N$

2) a-priori Schranken an u_N, die unabhängig von N sind

$\Rightarrow$ Beschränktheit der Approx.-Folge $(u_N)_N$

3) Konvergenz zur schwachen Lsg:

- schwache Kompaktheit $\Rightarrow$ schwach konvergente Teilfolge $(u_{N_k})_{N_k}$ $(u_{N_k} \rightharpoonup u)$ im geeignetem Raum

4) Eindeutigkeit (wegen a-priori Schranken)

$\Rightarrow$ ganze Folge konvergent $u_N \rightharpoonup u$

Außerdem $u_N \to u$ (starke Konvergenz)

Def: (schwache Konvergenz, schwach-* Konvergenz)

Sei X ein norm. Raum

- $(u_k)_k \subset X$ konvergiert schwach gegen $u \in X$, falls $f(u_k) \to f(u)$ $\forall f \in X'$

  Notation: $u_k \rightharpoonup u$ in X

- $(f_k)_k \subset X'$ konvergiert schwach-* gegen $f \in X'$, falls $f_k(u) \to f(u)$ $\forall u \in X$

  Notation: $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X'

Lemma 18 Sei X reflexiver und separabler normierter Raum und $R > 0$.

Dann ist

1) $\overline{B_R(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt
2) $\overline{B_R(0)} \subset X'$ schwach-* —"— (Banach-Alaoglu)

(d.h. jede Folge in $\overline{B_R(0)}$ hat eine schwach (schwach-*) konvergente TF mit Limes in $\overline{B_R(0)}$)

Bew: Funktionalana.

Satz 19 (!Existenz schwacher Lsg)

Zu jedem $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ und $u_0 \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ existiert für (6) eine eindeutige schwache Lsg. Sie erfüllt außerdem $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ und

$$\max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $C = C(\Omega, T, A, b, c)$.

Vorbereitung: Galerkin-Approximation

- Sei $(w_k)_k$ eine ONB von $L^2(\Omega)$ (Existenz von ONB in jedem Hilbertraum: Lemma von Zorn)

  d.h. $\forall u \in L^2(\Omega)\ \exists (d_k)_k \subset \mathbb{R}: \sum_{k=1}^{N} d_k w_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ $(N \to \infty)$

  $d_k = (u, w_k)_{L^2(\Omega)}$

- Wähle $(w_k)_k$ so, dass es ein Orthogonalsystem in $H^1_0(\Omega)$ ist

  Also $\int_\Omega w_k w_\ell = \delta_{k\ell}$, $\int_\Omega \nabla w_k \cdot \nabla w_\ell = \lambda_k \delta_{k,\ell}$ $\forall k,\ell$

  mit $\lambda_k \in \mathbb{R}$. (Existenz: Spektralsatz für den Operator $-\Delta$ in $H^1_0(\Omega)$)

Satz 20 (Spektralsatz für selbstadjung. Operatoren mit kompakten Resolventen)

Sei H ein Hilb-Raum, $A: D(A) \to H$ ein selbstadjung. Op. mit kompakten Resolventen.

(i) $\exists (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_j \to \infty$ und ein ONB $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H$

so dass $$D(A) = \left\{ x \in H : \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j^2 |\langle x, e_j\rangle_H|^2 < \infty \right\}$$

(ii) $\forall x \in D(A)$ gilt $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j\rangle_H e_j \to x$ in H.

Bew: Funktionalanalysis.

Bem: Für uns $A = -\Delta$, $H = L^2(\Omega)$, $D(A) = \{ u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$

- Endlich-dimensionaler Unterraum: $X_N := \text{span}\{w_1, \dots, w_N\}$
  - Projektion auf X_N: $$P_N : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \to X_N \\ u \longmapsto u_N := P_N u = \sum_{k=1}^{N} d_N^k w_k, \quad d_N^k := (u, w_k)_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$
    $(d_N^k = d_N^k(t))$

↳ Projektion von (6): ersetze u durch u_N und teste nur mit $v \in X_N$, d.h. mit w_k, $k = 1, \dots, N$

$$(14) \quad (\partial_t u_N(t))(w_k) + B(u_N(t), w_k; t) = (f(t), w_k)_{L^2(\Omega)}, \quad k = 1, \dots, N$$

Falls $\partial_t u_N \in L^2(0,T; X_N)$, d.h. $(d_N^k)' \in L^2(0,T;\mathbb{R})$, dann ist

$(\partial_t u_N(t))(w_k) = (\partial_t u_N(t), w_k)_{L^2} = (d_N^k)'(t)$, also ist

$$(14) \Leftrightarrow \quad (d_N^k)'(t) + \sum_{j=1}^{N} d_N^j(t) B(w_j, w_k; t) = (f(t), w_k)_{L^2(\Omega)}$$

Anfangsdaten: $u_N(0) = P_N u_0 \Leftrightarrow d_N^k(0) = (u_0, w_k)_{L^2} =: d_k^{(0)}$, $k = 1, \dots, N$

Bew. (von Satz 19)

1) Konstruktion einer approximativen Lsg

Def: $u_N : [0,T] \to X_N$ heißt approx. Lsg von (6), falls

(i) $u_N, \partial_t u_N \in L^2(0,T; X_N)$ (d.h. $d_N^k, (d_N^k)' \in L^2(0,T;\mathbb{R})$ $\forall k \in \{1, \dots, N\}$)

(ii) $$(d_N^k)'(t) + \sum_{j=1}^{N} e^{kj}(t)\, d_N^j(t) = f_k(t) \quad \text{für f.a. } t \in [0,T] \qquad (15)$$

wobei $e^{kj}(t) = B(w_j, w_k; t)$, $f_k(t) = (f(t), w_k)_{L^2(\Omega)}$, $k,j \in \{1, \dots, N\}$

(iii) $\quad d_N^k(0) = \alpha_k^{(0)} \quad , k = 1, \dots, N \,.$ (16)

Vektor-Notation:

$$(15),(16) \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{d}_N' + E \vec{d}_N = \vec{f} \quad \text{in } [0,T] \\ \vec{d}_N(0) = \vec{\alpha}^{(0)} \end{array} \right\} \quad (17)$$

<u>Lemma 21</u> Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutige Lsg $\vec{d}_N \in C([0,T], \mathbb{R}^N)$ von (17) mit $\vec{d}_N{}' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N)$.

(und damit eine eindeutige approx. Lsg u_N von (6))

<u>Bew:</u> (Fixpunkt-Argument)

<u>Bem:</u> Koeffizienten in (17) sind i. A. nicht stetig $\Rightarrow$ Satz von Peano nicht anwendbar

Es gilt $\quad E \in L^\infty(0,T; \mathbb{R}^{N\times N}) \,, \; \vec{f} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N)$.

(Normen in $\mathbb{R}^N$ bzw $\mathbb{R}^{N\times N}$ sind z. B. die ℓ^2-Norm bzw. Matrix-Norm erzeugt durch ℓ^2)

$$(17) \iff \vec{d}_N = \Phi(\vec{d}_N) \quad , \quad \Phi(\vec{d}_N)(t) := \vec{\alpha}^{(0)} - \int_0^t E(s)\vec{d}_N(s)\,ds + \int_0^t \vec{f}(s)\,ds$$

$\hookrightarrow$ suche Fixpunkt in $C([0,T_*], \mathbb{R}^N) \quad , T_* \le T$

$E, f \in L^\infty \Rightarrow \Phi : C([0,T_*], \mathbb{R}^N) \to C([0,T_*], \mathbb{R}^N)$ für jedes $T_* \in (0,T]$

Kontraktion: seien $p, q \in C([0,T_*], \mathbb{R}^N)$

$$\|\Phi(\vec{p}) - \Phi(\vec{q})\|_{C([0,T_*],\mathbb{R}^N)} \le \int_0^t \|E(s)(\vec{p}(s) - \vec{q}(s))\|_{\ell^2}\,ds$$
$$\le M\, T_* \, \|\vec{p} - \vec{q}\|_{C([0,T_*],\mathbb{R}^N)}$$

wobei $\quad M := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|E(t)\|_{\ell^2 \to \ell^2}$

Für $T_* < \frac{1}{M}$ erhalte Kontraktion und eindeutiges $\vec{d}_N \in C([0,T_*], \mathbb{R}^N)$

T_* unabh. von $\vec{d}_N(0) \Rightarrow$ wiederhole dies m-mal mit $m T_* \ge T$

$\Rightarrow$ Fixpunkt $\vec{d}_N$ in $C([0,T], \mathbb{R}^N)$.

$\downarrow$

noch z.z.: $\vec{d}_N' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N)$

$$\vec{d}_N' = \Phi(\vec{d}_N)' = -E\vec{d}_N + \vec{f} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N) \quad \begin{pmatrix} f \in L^2(0,T,L^2(\Omega)) \\ \Rightarrow f_k \in L^2(0,T) \ \forall k \end{pmatrix}$$

■

2) <u>a-priori Schranken an u_N</u>

<u>Lemma 22</u> Es gibt ein $0 < C = C(T, \Omega, A, b, c)$, sodass für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_N\|_{L^2(0,T;H^1)} + \|\partial_t u_N\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_0\|_{L^2}\right)$$

<u>Bew:</u> Wähle u_N als Testfunktion in (14):

$$(18) \quad (\partial_t u_N(t), u_N(t))_{L^2} + B(u_N(t), u_N(t); t) = (f(t), u_N(t))_{L^2} \quad \text{f.ü. in } [0,T]$$

<u>Beh:</u> $B(v,v;t) \geq \frac{\gamma}{2}\|v\|_{H^1}^2 - \mu\|v\|_{L^2}^2$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ $\quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

wobei γ die Ellip.-Konstante von A ist.

<u>Bew:</u> $\gamma\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \gamma\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(t)\partial_i v \partial_j v = B(v,v;t) - \sum_i \int_\Omega b_i(t)\partial_i v\, v - \int_\Omega c(t) v^2$

$$\leq B(v,v;t) + \sum_i \int_\Omega |b_i(t)||\partial_i v||v| - c_0\int_\Omega v^2, \quad c_0 = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega_T} c$$

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} B(v,v;t) + \|v\|_{L^2}\sum_i \|b_i\|_{L^\infty}\|\partial_i v\|_{L^2} - c_0\|v\|_{L^2}^2$$

$$\left[\beta := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\left(\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty}^2\right)^{1/2}\right] \qquad \leq B(v,v;t) + \beta\|v\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} - c_0\|v\|_{L^2}^2$$

$$\overset{\varepsilon\text{-Ungl.}}{\leq} B(v,v;t) + \beta\varepsilon\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\beta}{4\varepsilon} - c_0\right)\|v\|_{L^2}^2$$

Wähle $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\beta}$:

$$B(v,v;t) \geq \frac{\gamma}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 - \left(\frac{\beta^2}{2\gamma} - c_0\right)\|v\|_{L^2}^2$$

$$= \frac{\gamma}{2}\|v\|_{H^1}^2 - \mu\|v\|_{L^2}^2, \quad \mu := \frac{\beta^2}{2\gamma} - c_0 + \frac{\gamma}{2}$$

■

Also in (18):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}\|u_N\|_{H^1}^2 \leq (f,u_N)_{L^2} + \mu\|u_N\|_{L^2}^2 \qquad \text{f.ü. in } [0,T]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(e^{-2\mu t}\|u_N\|_{L^2}^2\right) + \frac{\gamma}{2}e^{-2\mu t}\|u_N\|_{H^1}^2 \leq e^{-2\mu t}\|f\|_{L^2}\|u_N\|_{L^2}$$

Integriere:

$$\frac{1}{2}e^{-2\mu t}\|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{-2\mu s}\|u_N(s)\|_{H^1}^2\,ds \leq \underbrace{\frac{1}{2}\|u_N(0)\|_{L^2}^2}_{\leq \|u_0\|_{L^2}^2} + \int_0^t e^{-2\mu s}\|f(s)\|_{L^2}\|u_N(s)\|_{L^2}\,ds$$

$$\overset{C-S}{\leq} \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^t e^{-2\mu s}\|f(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t e^{-2\mu s}\|u_N(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{\varepsilon\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + C\sup_{t\in[0,T]} e^{-2\mu t}\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \frac{\gamma}{4}\int_0^t e^{-2\mu s}\|u_N(s)\|_{H^1}^2\,ds$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2\mu t}\|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{4}\int_0^t e^{-2\mu s}\|u_N(s)\|_{H^1}^2\,ds \leq C\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\right)$$

$$c_1\left(\|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \|u_N\|_{L^2(0,t;H^1)}^2\right) \leq C\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\right) \quad \text{f.ü. in } [0,T]$$

$$c_1 = \min\left\{\frac{1}{2},\frac{\gamma}{4}\right\}\min_{t\in[0,T]} e^{-2\mu t}$$

$$\Rightarrow \max_{t\in[0,T]}\|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \|u_N\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \leq \frac{2C}{c_1}\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\right) \qquad (*)$$

noch abzuschätzen: $\partial_t u_N$

$$\|\partial_t u_N(t)\|_{H^{-1}} = \sup_{v\in H_0^1\setminus\{0\}} \frac{(\partial_t u_N(t),v)_{L^2}}{\|v\|_{H^1}} \qquad (\text{da } \partial_t u_N \in L^2(0,T;X_N))$$

$\boxed{\text{Einschub: S.102,5}}$

PDE (14) $\Rightarrow$ $$(\partial_t u_N(t),v_1) \leq |B(u_N(t),v_1;t)| + |(f(t),v_1)_{L^2}| \qquad \forall v_1\in X_N$$

$$\overset{B\text{ stetig}}{\leq} C\left(\|u_N(t)\|_{H^1} + \|f(t)\|_{L^2}\right)\|v_1\|_{H^1} \leq C\left(\|u_N(t)\|_{H^1} + \|f(t)\|_{L^2}\right)\|v\|_{H^1}$$

$$\Rightarrow \|\partial_t u_N(t)\|_{H^{-1}}^2 \leq C\left(\|u_N(t)\|_{H^1}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2\right) \qquad \text{für f.a. } t$$

Zerlegung in H_0^1: Wegen $(w_k)_k$ ONB in L^2 und Orthog.-System in H_0^1 gilt:

$H_0^1 \ni v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in X_N$, $v_2 \perp_{L^2} X_N$ und auch $v_2 \perp_{H^1} X_N$;

1) Wegen $(\partial_t u_N(t), v_2) = \sum_{k=1}^{N} d_N^{k'}(t) \underbrace{(w_k, v_2)_{L^2}}_{=0} = 0$, erhalte

$$(\partial_t u_N(t), v) = (\partial_t u_N(t), v_1)$$

2) $\|v_1\|_{H^1} \leq \|v\|_{H^1}$, da

$$\|v\|_{H^1}^2 = (v_1+v_2, v_1+v_2)_{H^1} = \|v_1\|_{H^1}^2 + \|v_2\|_{H^1}^2$$

(hier Orthogonalität von $(w_k)_k$ in H^1 wichtig) integriere $\int_0^T dt$:

$$\|\partial_t u_N\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})} \leq c\left(\|u_N\|^2_{L^2(0,T,H^1)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\right)$$
$$\overset{(*)}{\leq} C'\left(\|u_0\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\right)$$

(L.22)

3) Konvergenz gegen eine schwache Lsg

<u>Lemma 23</u> Es gibt eine Teilfolge $(u_N)_N$, für die gilt

$$u_N \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;H^1_0)$$
$$\partial_t u_N \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u \quad \text{in } L^2(0,T,H^{-1}),$$

wobei u eine schwache Lsg von (6) ist mit $u \in L^2(0,T;H^1_0)$ und $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1})$. Außerdem erfüllt u die a-priori Schranke im Satz 19.

<u>Bem:</u> $L^2(0,T;H^1_0)' = L^2(0,T;H^{-1})$ und die Wirkung von $v \in L^2(0,T;H^{-1})$ an $u \in L^2(0,T;H^1_0)$ ist $v(u) = \int_0^T v(t)(u(t))\,dt$.

Also $u_N \rightharpoonup u$ bedeutet $\int_0^T f(t)(u_N(t))\,dt \to \int_0^T f(t)(u(t))\,dt \quad \forall f \in L^2(0,T;H^{-1})$

$\partial_t u_N \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u$ —"— $\int_0^T \partial_t u_N(t)(v(t))\,dt \to \int_0^T \partial_t u(t)(v(t))\,dt \quad \forall v \in L^2(0,T;H^1_0)$

<u>Bew:</u> Nach L.22 ist $(u_N)_N$ beschränkt in $L^2(0,T;H^1_0)$
$(\partial_t u_N)_N$ —"— in $L^2(0,T;H^{-1})$

$\overset{L.18}{\Longrightarrow}$ (Banach-Alaoglu) $\exists$ TF $(u_N)_N$ sodass $u_N \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H^1_0)$
$\partial_t u_N \overset{*}{\rightharpoonup} u_*$ in $L^2(0,T;H^{-1})$

z.z.: 1) $u_* = \partial_t u$ (Übung-Blatt 13)
2) u ist schwache Lsg

2a) Gleichung
Sei $\phi \in C_c^\infty(0,T;\mathbb{R})$, $w \in X_M$ mit $M \in \mathbb{N}$. Wähle als Testfunktion
$v(t) := \phi(t)w \in X_M \quad (v \in C_c^\infty(0,T;X_M) \subset L^2(0,T;H^1_0))$

$\forall N \geq M: \quad (\partial_t u_N(t), \phi(t)w) + B(u_N(t), \phi(t)w; t) = (f(t), \phi(t)w)_{L^2}$

$$\underbrace{\int_0^T (\partial_t u_N(t), \phi(t)w)\, dt}_{=: I_1} + \underbrace{\int_0^T B(u_N(t), \phi(t)w; t)\, dt}_{=: I_2} = \underbrace{\int_0^T (f(t), \phi(t)w)\, dt}_{=: I_3}$$

$I_1 = (\partial_t u_N)(\phi w)$, da $v = \phi w \in L^2(0,T; H_0^1)$

$\to (\partial_t u)(\phi w)$, da $\partial_t u_N \xrightarrow{*} \partial_t u$

$= \int_0^T (\partial_t u(t))(\phi(t)w)\, dt = \int_0^T \phi(t)\, \partial_t u(t)(w)\, dt$

$I_2 \longrightarrow \int_0^T B(u(t), \phi(t)w; t)\, dt = \int_0^T \phi(t)\, B(u(t), w; t)\, dt$, da B stetig und bilinear

$I_3 = \int_0^T \phi(t)\, (f(t), w)_{L^2}\, dt$

Also $\int_0^T \phi(t) \left[\partial_t u(t)(w) + B(u(t), w; t)\right] dt = \int_0^T \phi(t)\, (f(t), w)_{L^2}\, dt$

$\forall \phi \in C_c^\infty(0,T) \ \forall w \in X_N, N \geq M$

$\overset{\text{Fundam.-Lemma}}{\underset{\text{der Var.-Rechnung}}{\Longrightarrow}}$ (19) $\partial_t u(t)(w) + B(u(t), w; t) = (f(t), w)_{L^2} \quad \forall w \in X_N, N \geq M$ und f.ü. $t \in [0,T]$

Da $\overline{\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N} = H_0^1(\Omega)$, gilt (19) für alle $w \in H_0^1(\Omega)$.

2b) Anfangsbedingung: z.z. $u(0) = u_0$

<u>Lemma 24</u> (partielle Integration)

Seien $u, v \in L^2(0,T; H_0^1)$ und $\partial_t u, \partial_t v \in L^2(0,T, H^{-1})$. Dann gilt

(*) $\int_0^T \partial_t u(t)(v(t))\, dt = (u(T), v(T))_{L^2} - (u(0), v(0))_{L^2} - \int_0^T \partial_t v(t)(u(t))\, dt.$

<u>Bew</u>: (*) gilt für glatte u, v:

- setze ~~u~~ u, v trivial fort auf $\mathbb{R}$
  ↪ erhalte $\tilde{u}, \tilde{v}$
- Für $\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon := \rho_\varepsilon * \tilde{u}, \rho_\varepsilon * \tilde{v} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ gilt (*)

Da $\partial_t \tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow \partial_t u$ in $L^2(0,T,H^1(\Omega))$

$\tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow u$ in $L^2(0,T;H^1_0)$

$\tilde{u}_\varepsilon(t) \longrightarrow u(t)$ in $L^2(\Omega)$ $\forall t \in [0,T]$

cf. Bew. von S. 17

(und genauso für v), folgt mit $\varepsilon \to 0$ die Aussage. ∎

Wähle nun die Testfunktion $\phi(t)\,w$ mit $\phi \in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $\phi(0)=1$, $\phi(T)=0$, $w \in H^1_0(\Omega)$.

$$\text{P.I.} \Rightarrow \int_0^T (\partial_t u(t))(\phi(t)w)\,dt = -(u(0),w)_{L^2} - \int_0^T \phi'(t)(w,u(t))_{L^2}\,dt$$

$$\overset{\text{PDE}}{\Longrightarrow} \int_0^T \phi(t)\,(f(t),w)_{L^2} - \phi(t)\,B(u(t),w;t)\,dt = -\int_0^T \phi'(t)(w,u(t))_{L^2}\,dt - (u(0),w)_{L^2}$$

$$\text{d.h. } (u(0),w)_{L^2} = \underbrace{\int_0^T \phi(t)\left[B(u(t),w;t) - (f(t),w)_{L^2}\right]dt - \int_0^T \phi'(t)(w,u(t))_{L^2}\,dt}_{=:\,I} \quad \forall w \in H^1_0(\Omega)$$

Andererseits: für die Approx.-Folge gilt genauso

$$\underset{\substack{\parallel \\ P_N u_0}}{(u_N(0),w)_{L^2}} = \underbrace{\int \phi(t)\left[B(u_N(t),w;t) - (f(t),w)_{L^2}\right]dt - \int_0^T \phi'(t)(w,u_N(t))_{L^2}\,dt}_{=:\,II} \quad \forall w \in X_M,\ M \le N$$

- Für $N \to \infty$ konvergiert II gegen I (mit $w \in X_M$) – cf. 2a)
- $(P_N u_0, w)_{L^2} \longrightarrow (u_0,w)_{L^2}$ $\forall w \in X_M$ (da $P_N u_0 \to u_0$ in L^2)

$\Rightarrow$ $(u_0,w)_{L^2} = (u(0),w)_{L^2}$ $\forall w \in X_M$

↳ gilt $\forall M \in \mathbb{N}$, daher für jedes $w \in H^1_0$

Also $u_0 = u(0)$.

Letztlich: a-priori Schranke für u folgt wie in L. 22
(keine Zerlegung von v nötig in der Abschätzung von $\|\partial_t u(t)\|_{H^{-1}}$)

(L.23)

4) Eindeutigkeit

Seien u_1, u_2 zwei Lsgen. Dann $u := u_1 - u_2$ erfüllt

$$(\partial_t u(t))(v) + B(u(t), v; t) = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ f.a. } t \in [0,T]$$
$$u(0) = 0$$

Wähle $v := u(t)$

- nach S. 17: $(\partial_t u(t))(u(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2$
- Koerzivität von B (cf. L. 22)

$$B(u(t), u(t); t) \geq \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H^1}^2 - \mu \|u(t)\|_{L^2}^2 \quad , \mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H^1}^2 \leq \mu \|u(t)\|_{L^2}^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2\mu \|u(t)\|_{L^2}^2 \\ \|u(0)\|_{L^2} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Gronwall}}{\Rightarrow} \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2}^2 e^{2\mu t} = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$\blacksquare$ (S. 19)

Lemma 25 (Gronwall-Ungl.)

Für $y \in L^1(0,T;\mathbb{R})$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gelte

$$y(t) \leq y_0 + c \int_0^t y(s)\,ds \quad \text{in } [0,T]. \qquad (*)$$

Dann ist $y(t) \leq y_0 e^{ct}$ für f.a. $t \in [0,T]$.

Bew: $z(t) := y_0 + c\int_0^t y(s)\,ds$ is $W^{1,1}(0,T;\mathbb{R})$ (Blatt 13)

und $z' = cy$.

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad z'(t) \leq c\,z(t) \quad , \quad z(0) = y_0 \qquad \text{für f.a. } t$$

$$(z(t) e^{-ct})' = z'(t) e^{-ct} - c\,z(t) e^{-ct} \leq 0$$

$$\Rightarrow z(t) e^{-ct} \leq y_0 \Rightarrow z(t) \leq y_0 e^{ct}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad y(t) \leq y_0 e^{ct} \qquad \text{für f.a. } t$$

$\blacksquare$

Bem: 1) Die Eindeutigkeit stellt sicher, dass für die ganze Folge $(u_N)_N$ gilt

$$u_N \longrightarrow u$$
$$\partial_t u_N \xrightarrow{*} \partial_t u.$$

Denn jede TF ist beschränkt, also erfüllt Schritt 3.

2) Stetige Abhängigkeit der schwachen Lsg von Daten.
- Seien $u_{1,2}$ Lsgen zu Daten $f_{1,2}$ und $u_0^{1,2}$
$\Rightarrow$ $u_1 - u_2$ löst das Problem mit Daten $f_1 - f_2$ und $u_0^1 - u_0^2$

$$\Rightarrow \max_{t\in[0,T]} \|(u_1-u_2)(t)\|_{L^2} + \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;H^1)} \leq C\left(\|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2}\right)$$

3) Verallgemeinerung auf $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$
- ersetze einfach $(f(t),v)_{L^2}$ durch $(f(t))(v)$ und $\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}$ durch $\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$

Inhomogene Dirichlet-Randdaten

Betrachte
$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu &= f && \text{in } \Omega_T \\ u &= h && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

mit $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Voraussetzung: h kann fortgesetzt werden zu einer Fkt. $\tilde{h}: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$

mit $\tilde{h} \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$

$\partial_t \tilde{h} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ (dann gilt $\tilde{h} \in C([0,T],L^2)$)

Transformation: $v := u - \tilde{h}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \partial_t v + Lv &= f + L\tilde{h} =: \tilde{f} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ v &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ v(\cdot,0) &= u_0 - \tilde{h}(0) \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

d.h. v erfüllt homogene RB !!

1) Löse für v
2) $u = v + \tilde{h}$

Bemerkung zu $H^{-1}(\Omega)$ $(= H^1_0(\Omega)')$

- Eine Fkt $f \in L^2(\Omega)$ definiert mehrere Elemente aus $H^{-1}(\Omega)$ (mehrere Wirkungen von f)

1) $v \mapsto T_f(v) := (f,v)_{L^2} \quad \forall v \in H^1_0$
   - stetig, da $|(f,v)_{L^2}| \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$
2) $v \mapsto a\|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$ mit $a \in \mathbb{R}$
3) falls $f \in H^1(\Omega)$, dann z.B.
   $v \mapsto (f,v)_{H^1}$
   - stetig, da $|(f,v)_{H^1}| \le \|f\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$
4) ... (∞-viele andere)

Für die approx.-Lsg $u_N(t) = \sum_{k=1}^{N} d_k^N(t)\, w_k$ mit $w_k \in H^1_0 \ \forall k$

gilt $\partial_t u_N \in L^2(0,T;H^1_0)$ $(\Rightarrow \partial_t u_N(t) \in H^1_0$ für f.a. $t)$

In der projezierten Gleichung (14) steht der Term $\partial_t u_N(t)(v)$ für $v \in X_N$ $(\subset H^1_0)$

↳ die richtige Wirkung von $\partial_t u_N(t)$ ist $(\partial_t u_N(t), v)_{L^2}$, nicht z.B. $(\partial_t u_N(t), v)_{H^1}$!

Grund: - die schwache Lsg u soll, falls $\partial_t u \in L^2(0,T;L^2)$, mit der Lsg von $(\partial_t u(t),v)_{L^2} + B(u(t),v;t) = (f(t),v)_{L^2} \quad \forall v \in H^1_0$ u f.a. t $(*)$ übereinstimmen!

($(*)$ kommt durch direktes Testen der PDE mit v)

- falls u glatt dann soll sie mit der klass. Lsg übereinstimmen. Mit part. Integration folgt dies aus $(*)$. Mit $(\partial_t u(t), v)_{H^1}$ würde die Gleichung $\partial_t u - \partial_t \Delta u + Lu = f$ folgen!

IV.5 Regularität für parabolische Glen

Frage: Falls Koeffizienten A, b, c, Rand $\partial\Omega$, Daten f, u_0 genügend regulär, ist dann u regulärer als $u \in L^2(0,T;H_0^1)$, $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1})$?

Formale Rechnung für die Wärmeleitungsgl. in $\Omega = \mathbb{R}^n$:

$$\left.\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

1) $$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)^2 = \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u \, u_t + (\Delta u)^2$$
$$\overset{\text{P.I.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + \underbrace{2\nabla u \cdot \nabla u_t}_{= \frac{d}{dt}|\nabla u|^2} + (\Delta u)^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 \overset{\text{P.I.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2$$

$$\overset{(\text{nach } \int_0^t dt)}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} |\underbrace{\nabla u(0)}_{= \nabla u_0}|^2 + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |D^2 u|^2 \right) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [0,T]} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + |D^2 u|^2) \le C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_0|^2 \quad (21)$$

2) Leite (20) in t ab: $\tilde{u} := u_t$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} &= \tilde{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

wobei $\tilde{f} := f_t$, $\tilde{u}_0 = u_t(\cdot,0) \overset{\text{PDE}}{=} f(\cdot,0) + \Delta u_0$

Teste (22) mit $\tilde{u}$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\tilde{u}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}|^2 \le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}||\tilde{u}| + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(0)^2 \le \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{f}^2 + \tilde{u}^2) + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_0^2 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [0,T]} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 \le C\Big(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (f_t^2 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{abgeschätzt in (21)}}}{u_t^2}) + \int_{\mathbb{R}^n} (f(\cdot,0)^2 + |D^2 u_0|^2) \Big)$$

$$\int f(\cdot,0)^2 \le \max \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \overset{S.17(iii)}{\le} C\Big(\|f\|^2_{\underset{(L^2(0,T;L^2))}{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}} + \|f_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}\Big)$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 \le C\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(f_t^2+f^2) + \int_{\mathbb{R}^n}(|D^2u_0|^2+|\nabla u_0|^2)\Big)$$

Außerdem: $$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2u|^2 = \int_{\mathbb{R}^n}(\Delta u)^2 \overset{PDE}{=} \int_{\mathbb{R}^n}(f-u_t)^2 \le C\int_{\mathbb{R}^n} f^2+u_t^2$$

$$\overset{S.17(iii)}{\le} C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(f^2+f_t^2) + \sup_t \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2$$

Insgesamt:

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^n}(u_t^2+|D^2u|^2) + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 \le C\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(f_t^2+f^2) + \int_{\mathbb{R}^n}(|D^2u_0|^2+|\nabla u_0|^2)\Big)$$

Jetzt rigoros:

Satz 26 Seien $A,b,c \in L^\infty$ und unabhängig von t und $A\in W^{1,\infty}(\Omega)$. Sei $u_0\in H^1_0(\Omega)$, $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

die schwache Lsg $u\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ mit $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ von

$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu &= f && \text{in } \Omega_T \\ u &= 0 && \text{auf } \Omega\times[0,T] \\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega\times\{t=0\} \end{aligned}$$

erfüllt

$$u\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \quad \partial_t u\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

und

(23) $$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^1} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|\partial_t u\|_{L^2(0,T;L^2)} \le C\big(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_0\|_{H^1}\big)$$

Bew: $\vec{d}_N' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N) \Rightarrow u_N'(t) = \sum_{k=1}^N d_N^{k\,\prime}(t)\, w_k \in H^1_0(\Omega)$ für f.a. t

Wähle $u_N'(t)$ als Test Fkt:

$$(u_N', u_N')_{L^2} + B(u_N, u_N') = (f, u_N')_{L^2} \qquad \text{f.ü. in } [0,T]$$

$$B(u_N, u_N') = \underbrace{\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\, u_{N,i}\, u'_{N,j}}_{=:I_1} + \underbrace{\int_\Omega \sum_i b_i\, u_{N,i}\, u_N' + c\, u_N u_N'}_{=:I_2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \underbrace{\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\, u_{N,i}\, u_{N,j}}_{=:\tilde{A}(u_N, u_N)} \quad , \text{da } A \text{ symmetrisch und } A \neq A(t)$$

$$|I_2| \overset{\substack{C-S\\ \varepsilon\text{-Ungl.}}}{\leq} \frac{c}{\varepsilon}\|u_N\|_{H^1}^2 + \varepsilon \|u_N'\|_{L^2}^2$$

$$|(f, u_N')| \leq \frac{c}{\varepsilon}\|f\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|u_N'\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \|u_N'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tilde{A}(u_N, u_N) \leq \frac{c}{\varepsilon}\left(\|u_N\|_{H^1}^2 + \|f\|_{L^2}^2\right) + 2\varepsilon\|u_N'\|_{L^2}^2$$

Wähle $\varepsilon < \frac{1}{2}$, integriere $\int_0^t$:

$$\|u_N'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \sup_{t\in[0,T]} \tilde{A}(u_N(t), u_N(t)) \leq c\Big(\underbrace{\tilde{A}(u_N(0), u_N(0))} + \|u_N\|_{L^2(H^1)}^2 + \|f\|_{L^2(L^2)}^2\Big)$$

$$\overset{A\in L^\infty}{\leq} c\int |\nabla u_N(0)|^2 \leq c\|u_N(0)\|_{H^1}^2$$

$$\leq c\|u_0\|_{H^1}^2$$

- Nach L.22: $\|u_N\|_{L^2(H^1)}^2 \leq c\left(\|f\|_{L^2(L^2)}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2\right)$
- Elliptizität: $\tilde{A}(v,v) \geq \gamma \int_\Omega |\nabla v|^2 \quad \forall v \in H_0^1 \quad \left(\overset{\text{Poinc.}}{\geq} c\|v\|_{H^1}^2\right)$

$$\Rightarrow \|u_N'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|u_N(t)\|_{H^1}^2 \leq c\left(\|u_0\|_{H^1}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\right) \quad (*)$$

<u>Bch</u>: Mit $N \to \infty$ folgt

$$\|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^1}^2 \leq c\,(\quad -\,\|\,- \quad). \qquad (27)$$

Bew: 1) $u_N' \xrightarrow{*} u'$ in $L^2(0,T;L^2)$ $\quad (= L^2(0,T;L^2)')$

$$\Rightarrow \int_0^T (u_N'(t), u'(t))_{L^2} \longrightarrow \|u'\|^2_{L^2(0,T;L^2)}$$

$$\text{linke Seite} \leq \|u_N'\|_{L^2(L^2)} \|u'\|_{L^2(L^2)} \overset{(*)}{\leq} c\left(\|u_0\|^2_{H^1} + \|f\|^2_{L^2(L^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2(L^2)}$$

$$\Rightarrow \|u'\|_{L^2(L^2)} \leq c\left(\|u_0\|^2_{H^1} + \|f\|^2_{L^2(L^2)}\right)^{1/2}$$

2) $\sup_t \|u_N(t)\|_{H^1} \leq C_1 \quad \forall N \qquad \left(C_1^2 = c\left(\|u_0\|^2_{H^1} + \|f\|^2_{L^2(L^2)}\right)\right)$

$$\Rightarrow \int_a^b (u_N(t), v)_{H^1}\, dt \leq \int_a^b C_1 \|v\|_{H^1} \quad \forall v \in H^1_0, \ \forall a,b \in [0,T]$$

wähle $v = u(t)$

$$\underbrace{\int_a^b (u_N(t), u(t))\, dt}_{\longrightarrow \|u\|^2_{L^2(a,b;H^1)}} \leq \int_a^b C_1 \|u(t)\|_{H^1}\, dt \overset{C\text{-}S}{\leq} C_1 \sqrt{|a-b|}\, \|u\|_{L^2(a,b;H^1)}$$

(da $u_N \rightharpoonup u$ in $L^2(H^1)$)

$$\Rightarrow \int_a^b \|u(t)\|^2_{H^1} \leq C_1^2 |a-b| \qquad \forall a,b \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2_{H^1} \leq C_1^2 = c\left(\|u_0\|^2_{H^1} + \|f\|^2_{L^2(L^2)}\right)$$

■

Noch z.z. $u \in L^2(0,T;H^2)$

PDE: $\quad (u'(t), v)_{L^2} + B(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in H^1_0$ und f.a. $t \in [0,T]$

$\Leftrightarrow$

(**) $\quad B(u(t), v) = (h(t), v)_{L^2} \qquad$ mit $h := f - u'$

$h(t) \in L^2(\Omega)$ für f.a. t

(**) = ellip. Gleichung

elliptische Regularität (Satz III.25) $\overset{(A \in W^{1,\infty})}{\Longrightarrow} u(t) \in H^2(\Omega)$ für f.a. t und

$$\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \leq c\left(\|h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \leq c\left(\|f(t)\|^2_{L^2} + \|u'(t)\|^2_{L^2} + \|u(t)\|^2_{L^2}\right)$$

Jetzt integriere $\int_0^T$:

$$\overset{\text{Bch.}}{\Longrightarrow} \|u\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \le c\left(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_0\|^2_{H^1}\right). \qquad (25)$$

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2} dt \overset{\text{Bch.}}{\le} cT\left(\|u_0\|^2_{H^1} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\right)\right)$$

(24), (25) $\Rightarrow$ (23).

$\blacksquare$ (S. 26)

<u>Satz 27</u>: Unter den Voraussetzungen von S. 26 sei noch

$u_0 \in H^2(\Omega)$, $\partial_t f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Dann ist

$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, $\partial_t u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$,

$\partial_t^2 u \in L^2(0,T;H^{-1})$ und es gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \left(\|u(t)\|_{H^2} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2}\right) + \|\partial_t u\|_{L^2(0,T;H^1)} + \|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \le c\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|u_0\|_{H^2}\right)$$

<u>Bew</u>: [Evans, Sec. 7.1]

Maximumprinzip für schwache Lsgen

weggelassen

<u>Satz 28</u>: Sei $u \in L^2(0,T;H^1_0)$ mit $\partial_t u \in L^2(0,T;L^2)$ die schwache Lsg von

$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu &= 0 && \text{in } \Omega_T \\ u &= h && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega \times \{t=0\} \end{aligned}$$

mit $Lu = -\nabla\cdot(A\nabla u) + cu$, $A, c \in L^\infty(\Omega_T)$, A gleichm. ellip.; $c \ge 0$

und $u_0 \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $\partial_t h \in L^2(0,T;H^{-1})$.

Falls $u_0 \le M$, $h \le M$ mit $M > 0$, dann gilt

$$u \le M \quad \text{f. ü. auf } \Omega \times (0,T).$$

Bew: Wähle $\varphi := (u-M)_+ = (u-M)\chi$, als Testfkt.

$\chi := \chi_{\{u>M\}} : \Omega \times (0,T) \to \{0,1\}$, $\chi(x,t) = 1$ g.d.w. $u(x,t) > M$.

Bem: 1) Spur $\varphi(t) = 0$, da $u(t) \leq M$ auf $\partial\Omega$

2) Nach Stampacchia (L. II.37):

- $(u-M)(t) \in H^1$ für f.a. $t \Rightarrow \varphi(t) \in H^1$, $\nabla\varphi = \nabla u\,\chi$ (*)
- $u \in H^1(\Omega_T)$ (ohne Beweis) $\Rightarrow \partial_t \varphi = \partial_t u\,\chi$

$$\partial_t \varphi^2 = 2\varphi\, \partial_t u\,\chi = 2\varphi\,\partial_t u \qquad (**)$$

$$0 = \int_0^T \int_\Omega \varphi\,\partial_t u + \int_0^T \int_\Omega \sum a_{ij}\, \partial_i u\, \partial_j \varphi + c\,u\,\varphi$$

$$= \int_0^T \partial_t \int_\Omega \frac{1}{2}\varphi^2(t) + \int_0^T \int_\Omega \underbrace{\sum a_{ij}\, \partial_i (u-M)\, \partial_j (u-M)\,\chi}_{= a_{ij}\,\partial_i\varphi\,\partial_j\varphi} + c\,\underbrace{u}_{\geq M \text{ auf supp}\,\chi}\,(u-M)\chi$$

$$\geq \frac{1}{2}\|(u-M)_+(T)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\|(u_0-M)_+\|_{L^2}^2}_{=0} + \int_0^T \int_\Omega \underbrace{\nabla\varphi\cdot(A\nabla\varphi)}_{\geq \gamma|\nabla\varphi|^2} + c\,\underbrace{(u-M)^2\chi}_{=\varphi^2}$$

$$\geq \gamma\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \nabla\varphi(t) = 0 \text{ für f.a. } t \\ \varphi(t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ für f.a. } t \in (0,T) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \times (0,T)$$

$\blacksquare$