Blatt 1

Abgabe: bis Montag 31.10.2016 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (25 Punkte): (*Laplacegleichung auf einem Rechteck in $\mathbb{R}^2$; Separation der Variablen.*) Sei $L > 0$ und $\Omega := (0, L) \times (0, 1)$.

a) Finden Sie alle Lösungen der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

die von der Form $u(x, y) = v(x)w(y)$ sind und die Randbedingung

$$u(x, y) = 0, \ \forall (x, y) \in (0, L) \times \{0, 1\}$$

erfüllen.

b) Finden Sie die Lösung, die zusätzlich die Randbedingung

$$u(x, y) = 0, \ \forall (x, y) \in \{0, L\} \times (0, 1)$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (20 Punkte): (*Maxwell-Gleichungen*) Für Vektorfelder $E, B \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ schreiben wir

$$\partial_t E = (\partial_t E_1, \partial_t E_2, \partial_t E_3), \ \Delta E = (\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3) \qquad \text{(und analog für } B\text{)}.$$

Die Operatoren Δ, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ und ∇ (d.h. Laplace, Divergenz, Rotation (curl) und Gradient) sind Ableitungsoperatoren bezüglich der x-Variablen, wobei $\nabla \times E$ gegeben ist durch

$$\nabla \times E := (\partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2, \partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3, \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1).$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\Delta E + \nabla(\nabla \cdot E)$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass falls $E, B \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot E = 0, \qquad \nabla \cdot B = 0,$$
$$\partial_t E = \nabla \times B, \qquad \partial_t B = -\nabla \times E$$

sind, dann erfüllen E und B die Wellengleichung, d.h.

$$\partial_t^2 E - \Delta E = 0, \ \partial_t^2 B - \Delta B = 0.$$

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Dirac-Delta*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die Dirac-Delta-Distribution δ_{x_0} nicht als Integral bezüglich einer $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$-Funktion geschrieben werden kann.
Hinweis: Betrachten Sie die Testfunktion

$$\varphi_\varepsilon(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} e^{-\frac{1}{\varepsilon^2 - |x-x_0|^2}}, & |x - x_0| < \varepsilon \\ 0, & x \in \Omega, |x - x_0| \geq \varepsilon \end{cases}$$

für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, *und untersuchen Sie den Limes* $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 4 (30 Punkte): (*distributionelle Ableitung*)

a) Zeigen Sie, dass die distributionelle Ableitung eindeutig ist.

b) Finden Sie die distributionelle Ableitung von $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha, \alpha \geq 1 - n$. Beweisen Sie, dass Ihr Vorschlag wirklich die distributionelle Ableitung ist.