Tomáš Dohnal
Nils Dabrock

Blatt 10

Abgabe: bis Montag 16.1.2017 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (30 Punkte): (*Maximumprinzip für den Gradienten*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei weiter $A \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n})$ und u eine $C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$-Lösung von

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c\left(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $v := |\nabla u|^2 + \lambda u^2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass für λ groß genug $Lv \leqslant 0$ ist und daher das schwache Maximumprinzip anwendbar ist. Nutzen Sie die Identität $Lu = 0$ in Ω, um die Ableitungsterme dritter Ordnung im Ausdruck Lv umzuschreiben.

Aufgabe 2 (15 Punkte): Zeigen Sie, dass im Allgemeinen das Maximumprinzip für $Lu := -\Delta u + cu$ mit $c < 0$ nicht gilt. Verwenden Sie hier den Fakt, dass der Operator $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ positive Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 3 (30 Punkte): (*H^2-Regularität im semilinearen Problem auf $\mathbb{R}^n$*) Es sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset\subset \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\varphi)^T \nabla u + \varphi c(u)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

mit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und einer glatten Funktion c mit

$$c(0) = 0,\ c' \geqslant 0.$$

Zeigen Sie, dass $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ ist.
Hinweis: Orientieren Sie sich an dem Beweis von Satz 25 (H^2-Regularität im Inneren) um die Norm $\|\partial_i^h(\nabla u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ gleichmäßig in h zu beschränken. Beachten Sie, dass die Voraussetzungen aus Lemma 20 (diskrete partielle Integration) abgeschwächt werden können, und nutzen Sie dies, um die Norm zunächst umzuschreiben.

Aufgabe 4 (25 Punkte): (*Maximumprinzip für gemischte Randwerte*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt mit einem C^2-Rand und es sei $a \in C(\partial\Omega), a \geqslant 0, a \not\equiv 0$. Sei weiter $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gegeben mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &\leqslant 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \nu \cdot \nabla u + au &\leqslant 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$ ist. Zeigen Sie, dass $u \leqslant 0$ in $\overline{\Omega}$.
Hinweis: Man schließt ein positives inneres Maximum und ein positives Randmaximum mit Hilfe des starken Maximumprinzips und des Lemmas von Hopf aus.