INSTITUT FÜR ANALYSIS — TOMÁŠ DOHNAL
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND — NILS DABROCK
PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1 — WISE 16/17

Blatt 13

Abgabe: bis Montag 6.2.2017 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (20 Punkte): (*Galerkin-Approximation*)
Es sei H ein Hilbertraum und es existiere eine Folge von endlichdimensionalen Unterräumen $(H_n)_n \subset H$ mit

- $H_n \subset H_{n+1}$ für alle $n \geqslant 1$,
- $\overline{\bigcup_{n\in N} H_n} = H$.

Es seien weiter $L : H \to \mathbb{R}$ stetig und linear und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ stetig, koerziv und bilinear, d.h. für $u, v \in H$ gilt $a(u,v) \leqslant C_0\|u\|_H\|v\|_H$ und $a(u,u) \geqslant c_0\|u\|_H^2$ für Konstanten $0 < c_0 < C_0$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $u_n \in H_n$ mit

$$a(u_n, v) = L(v) \quad \forall v \in H_n$$

und es existiert ein $u \in H$ mit

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

(b) Zeigen Sie die Konvergenz $u_n \to u$ in H für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (30 Punkte): (*Wärmeleitungsgleichung mit der Galerkin-Approximation*)
Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)$ und $f \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega)), u_0 \in L^2(\Omega)$ das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x^2 u + f && \text{in } \Omega \times (0,\infty),\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty),\\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

(a) Die explizit bekannten Eigenfunktionen von $-\partial_x^2$ auf Ω mit homogenen Dirichlet-Daten in $x = 0, 1$ bilden eine ONB $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$. Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und finden Sie die approximative Lösung des Problems in jedem zugehörigen endlich-dimensionalen Unterraum.

(b) Zeigen Sie, dass für die schwache Lösung die Energierelation

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (f(t), u(t))_{L^2(\Omega)}$$

gilt. Formulieren sie die Terme auf der linken und rechten Seite dieser Energierelation in Abhängigkeit von den Koeffizienten der approximativen Lösung $u_N(t) = \sum_{k=1}^N d_k^N(t) w_k$ aus (a), wobei Sie f und u_0 durch die zugehörigen Projektionen auf den endlich-dimensionalen Unterraum ersetzen.

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Absolutstetige Funktionen*)
Es sei $f \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ und $F(t) := \int_0^t f(s)\,ds$ für $t \in (0,T)$. Zeigen Sie: $F \in W^{1,1}(0,T;\mathbb{R})$ und für die Distributionsableitung von F gilt $F' = f$ fast überall. Führen Sie zwei Beweise: Einen durch Approximation und einen mit Differenzenquotienten.

Aufgabe 4 (25 Punkte): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $T > 0$. Weiter sei

$$\begin{aligned} &u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &\partial_t u_k \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\partial_t u = v$ ist, d.h. dass

$$\int_0^T u(t)\phi'(t)dt = -\int_0^T v(t)\phi(t)dt \qquad \text{in } H^{-1}(\Omega)$$

für alle $\phi \in C_c^\infty(0,T)$ gilt.

Hinweis: Für $\phi \in C_c^\infty(0,T)$ und $w \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\int_0^T (\partial_t u_k)(\phi w)dt = -\int_0^T (u_k, \phi' w)_{L^2(\Omega)}dt = -\int_0^T \phi'(t) \int_\Omega u_k(x,t)w(x)dxdt.$$