Tomáš Dohnal
Nils Dabrock

Blatt 3

Abgabe: bis Montag 14.11.2016 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)
Ab 9.11. ist die Übung im Raum M1011 !!

Aufgabe 1 (25 Punkte): (*Approximation in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$*)
Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1,\infty)$. Zeigen sie, dass der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ liegt, d.h. dass für jedes $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert, so dass $\|u-u_j\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $j \to \infty$.
Hinweis: $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger können nach einem Satz aus der Vorlesung durch $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen approximiert werden. Es reicht also zu zeigen, dass $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen durch $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden können. Dazu dürfen Sie ohne Beweis die Existenz einer glatten Abschneidefunktion $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta = 1$ in $B_1(0)$ und $\zeta = 0$ in $B_2(0)^c$ annehmen.

Aufgabe 2 (20 Punkte): Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ *harmonisch*, falls $\Delta u = 0$ in Ω, und eine Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *distributionell harmonisch*, falls

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^2(\Omega).$$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in H^1(\Omega)$ distributionell harmonisch. Zeigen Sie mit einem Approximationsargument, dass u auch schwach harmonisch ist, d.h.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Spur des Produktes*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Zeigen Sie, dass für den Spuroperator S gilt

$$S(uv) = S(u)S(v), \qquad \text{falls } u, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Hinweis: Approximation durch glatte Funktionen.

Aufgabe 4 (30 Punkte): Es seien $u, v \in L^p(I)$ mit $p \in [1,\infty)$ und $I = (0,1)$. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $u \in W^{1,p}(I)$ und $u' = v$,

(ii) $u(x) = u(y) + \int_y^x v(s)\,\mathrm{d}s$ für fast alle $x, y \in I$ und u hat einen $C(\bar{I})$-Repräsentanten (d.h. u stimmt fast überall auf I mit einem $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ überein).

Hinweis: Für (i) $\Rightarrow$ (ii) approximieren Sie durch glatte Funktionen und verwenden den Satz von Arzelà-Ascoli.