Blatt 4

Abgabe: bis Montag 21.11.2016 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (25 Punkte): (*Produktregel - d.h. Lemma 15 aus der Vorlesung.*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es seien $p \in (1,\infty)$ und $q = p/(p-1)$. Zeigen Sie, dass

$$u \in W^{1,p}(\Omega), v \in W^{1,q}(\Omega) \;\Rightarrow\; uv \in W^{1,1}(\Omega)$$

und

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v,$$

wobei $\nabla u, \nabla v$ die schwachen Gradienten bezeichnen.
Hinweis: Im Vergleich zu Lemma 15, in dem die Aussage nur für $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ formuliert worden ist, ist die obige Aussage ein wenig allgemeiner. Für den Beweis verwendet man eine Approximation durch glatte Funktionen und nutzt die Vollständigkeit von $W^{1,1}(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 (20 Punkte): (*Fourier-Transformation der schwachen Ableitung.*)
Wir haben in der Vorlesung bewiesen, dass für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Identität

$$\widehat{D^\alpha u}(y) = (\mathrm{i}y)^\alpha \hat{u}(y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Zeigen Sie, dass diese Identität auch für $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt, falls $|\alpha| \le k$.
Hinweis: Approximation durch glatte Funktionen.

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Poincaré-Ungleichung auf Gebieten beschränkt nur in einer Richtung.*)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und in eine Richtung beschränkt und $p \in [1,\infty)$. Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert, so dass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Geben Sie die Konstante c möglichst explizit an.
Hinweis: Machen Sie den Beweis der Poincaré-Ungleichung auf beschränkten Gebieten aus der Vorlesung nach und wählen Sie eine andere Hilfsfunktion als $x - x_0$.

Aufgabe 4 (30 Punkte):

(a) (*Die Kettenregel*) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ und $f(0) = 0$. Weiter sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\partial_{x_i}(f \circ u) = f'(u)\partial_{x_i}u.$$

Hinweis: Approximieren Sie u durch glatte Funktionen $(u_j)_j \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ und wählen Sie eine geeignete Teilfolge, so dass die Gradienten auch punktweise konvergieren. Folgern Sie die Konvergenz von $f \circ u_j$ und $\nabla(f \circ u_j)$ in $L^p(\Omega)$, um mit der Vollständigkeit von $W^{1,p}(\Omega)$ die Behauptung zu zeigen.

(b) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass dann auch der positive Teil von u, d.h. $u_+ := \max\{0, u\}$ in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt und für die schwache Ableitung gilt

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u & \text{fast überall in } \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \\ 0 & \text{fast überall in } \{x \in \Omega : u(x) \leq 0\}. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie für u_+ die Approximation

$$f_\varepsilon(u) := \begin{cases} \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \textit{für } u \geq 0 \\ 0 & \textit{für } u < 0, \end{cases}$$

Teil (a) und bilden Sie den Limes $\varepsilon \to 0$.