

Blatt 5

Abgabe: bis Montag 28.11.2016 in der Vorlesung  
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

**Aufgabe 1 (20 Punkte):** (*Einbettung in  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$* )

Zeigen Sie, dass für  $s \in (\frac{n}{2}, \infty)$  eine stetige Einbettung  $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$  existiert.

**Aufgabe 2 (25 Punkte):** (*Anwendung der Fourier-Transformation an PDEs - 1*)

Lösen Sie die Poisson-Gleichung in  $\mathbb{R}^n$

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  mit Hilfe der Fourier-Transformation.

- Unter welcher Bedingung an  $\hat{f}$  gibt es eine Lösung  $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ ?
- Reicht für  $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$  die Bedingung  $|\hat{f}(k)| < c|k|^\alpha$  für alle  $|k| < 1$  mit einem  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?
- Unter welcher Bedingung an  $\hat{f}$  gibt es eine Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ?
- Wie ändern sich diese Bedingungen für die Gleichung

$$-\Delta u(x) + au(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit  $a > 0$ ?

*Hinweis: Man wendet die Fourier-Transformation erst formal (ohne Rücksicht auf die Regularität) auf die Gleichung an um eine Lösung zu konstruieren und rechtfertigt die Rechnung danach.*

**Aufgabe 3 (25 Punkte):** (*Anwendung der Fourier-Transformation an PDEs - 2*)

Betrachten Sie die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) + c \cdot \nabla_x u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

mit  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Fourier-Transformation. Für welche  $f$  ist  $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^n)$  für alle  $t \geq 0$ ?

*Hinweis: Nach der Fourier-Transformation erhält man für jedes  $k$  eine gewöhnliche Differentialgleichung, die einfach zu lösen ist. Sonst gilt der gleiche Hinweis wie bei Aufgabe 2.*

**Aufgabe 4 (30 Punkte):** (*Einbettungen*)

Sei  $\Omega := B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$  und  $u(x) := \log |\log |x||$ . Zeigen Sie mit Hilfe dieser Funktion:

- a) Es gibt keine stetige Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .
- b) Es gibt keinen stetigen Punkt-Auswertungsoperator  $S : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $S(u) = u(0)$  für  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ .

Es sei nun  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall. Zeigen Sie:

- c) Im Gegensatz zu Teil b) existiert für alle  $p \in [1, \infty)$  und  $x \in \overline{\Omega}$  ein stetiger Punktauswertungsoperator  $S_x : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $S_x(u) = u(x)$  für alle  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

*Hinweis: Nutzen Sie in Teil c) die Aussage von Blatt 3, Aufgabe 4, die Sie ohne Beweis angepasst auf diese Situation anwenden dürfen. Beweisen Sie die Aussage zunächst für  $p = 1$  und folgern Sie daraus den allgemeinen Fall.*

*Teil c) kann als eindimensionale Version des Spursatzes interpretiert werden.*