Blatt 6

Abgabe: bis Montag 5.12.2016 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (20 Punkte): (*Spuroperator in H^1*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Zeigen Sie für den Spuroperator $S : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$

(a) die Ungleichung

$$\|S(u)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \le c\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right) \qquad \text{für alle } u \in H^1(\Omega),$$

(b) die Kompaktheit, d.h. dass es für jede beschränkte Folge $(u_j)_j \subset H^1(\Omega)$ eine Teilfolge $(u_{j_k})_{j_k}$ gibt, so dass $S(u_{j_k})$ in $L^2(\partial\Omega)$ konvergent ist.

Hinweis: Teil (a) erhalten Sie entweder durch Anwendung des Spursatzes auf eine geeignete Funktion oder durch Modifikation der Abschätzung im Beweis des Spursatzes aus der Vorlesung, den Sie in Ihrer Abgabe nicht vollständig wiederholen müssen. Für (b) verwenden Sie (a) und einen passenden Einbettungssatz.
Bemerkung: Die Aussagen gelten auch für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand.

Aufgabe 2 (20 Punkte): (*Newton-Potential*) Betrachten Sie das Newton-Potential $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welches für $x \neq 0$ gegeben ist durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|}|x|^{2-n} & n \ge 3. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} &\Phi \in L^p(B_1(0)) && \text{falls } p \in \left[1, \tfrac{n}{n-2}\right), n \ge 2 \\ &\Phi \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)) && \text{falls } p \in \left(\tfrac{n}{n-2}, \infty\right), n \ge 3. \end{aligned}$$

(b) Rechnen Sie nach:

$$\int_{\partial B_r(0)} \nabla\Phi(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}S(x) = -1$$

für alle $r > 0$, wobei ν der äußere Normalenvektor an $\partial B_r(0)$ ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Direkte Minimierung*) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit Lipschitz-Rand, $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ symmetrisch und gleichmäßig elliptisch, $f \in L^2(\Omega)$ und $h \in H^1(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie die Existenz eines Minimierers von

$$E(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}\nabla u \cdot A\nabla u - fu \,\mathrm{d}x$$

in

$$M := \{u \in H^1(\Omega) : u = h \text{ f.ü. auf } \partial\Omega\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Minimierer die eindeutige schwache Lösung ist von

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (A\nabla u) &= f \text{ in } \Omega \\ u &= h \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für die Eindeutigkeit argumentieren Sie ohne die Sätze von Riesz und Lax-Milgram.

Hinweis: In (a) arbeiten Sie analog zum Beweis des Darstellungssatzes von Riesz.

Aufgabe 4 (20 Punkte): (*Interpolationsungleichung*) Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $p \in [2, \infty)$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\|\nabla u\|^2_{L^p(\Omega)} \le C\|u\|_{L^p(\Omega)}\|D^2 u\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.
Hinweis: Schreiben Sie $|\nabla u|^p = \nabla u \cdot \nabla u |\nabla u|^{p-2}$ und approximieren Sie u durch Funktionen $(u_k)_k \subset C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ und durch Funktionen $(v_k)_k \subset W^{2,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ in $W^{2,p}(\Omega)$.

Aufgabe 5 (15 Punkte): (*schwache Lösung*) Es sei $\mathbb{R}^2 \supset \Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass die Lösung dieser Gleichung rotationssymmetrisch ist und daher in der Form $u(x) = h(|x|^2)$ dargestellt werden kann. Bemerkung: Es ist bekannt, dass es keine klassische Lösung dieses Problems gibt.