TOMÁŠ DOHNAL
NILS DABROCK

Blatt 9

Abgabe: bis Montag 9.1.2017 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (30 Punkte): (*Innere Regularität für die Poisson-Gleichung mit Hilfe der Fouriertransformation*)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit Lipschitz-Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega.$$

Verwenden Sie die Fourier-Tranformation um zu zeigen, dass für jedes $V \subset\subset \Omega$ gilt $u \in H^2(V)$ und

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq c(V)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Hinweis: Um die Fourier-Transformation anwenden zu können, müssen zunächst u und f von V auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden. Eine mögliche Fortsetzung ist durch ηu gegeben, wobei $\eta \in C_c^\infty(V')$ eine Abschneidefunktion mit $\eta \equiv 1$ auf V und $V \subset\subset V' \subset\subset \Omega$ ist. Leiten Sie dann eine Gleichung auf $\mathbb{R}^n$ her, die im schwachen Sinne durch ηu gelöst wird und bei der die Testfunktionen aus $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sind. Wählen Sie schließlich $x \mapsto e^{-ik\cdot x}$ als Testfunktion, um die Gleichung in Fourier-Variablen umzuschreiben. Die H^2-Abschätzung folgt dann aus der äquivalenten Darstellung von $H^2(\mathbb{R}^n)$ mit Hilfe der Fouriertransformation.

Aufgabe 2 (10 Punkte): (*Satz von Schwarz für schwache Ableitungen*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\partial_{ij} u = \partial_{ji} u \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

fast überall in Ω gilt.

Aufgabe 3 (30 Punkte): (*Regularität des gestörten Problems*)
Es seien Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konstante positiv definite Matrix und $C > 0$, sodass gilt:

Ist $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$-\nabla \cdot (A_0 \nabla u) = f \text{ in } \Omega, \tag{0.1}$$

so gilt bereits $u \in H^2(\Omega)$ mit

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)}.$$

Betrachten Sie nun für ein Matrix-Feld $A \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $||A - A_0||_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon$ das Problem

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = f, \qquad u \in H_0^1(\Omega). \tag{0.2}$$

Zeigen Sie: Es existiert $\varepsilon_0 > 0$, sodass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und $f \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ des Problems (0.2) existiert.

Anleitung: Beweisen Sie die Aussage in drei Schritten:
(i) Leiten Sie zunächst formal (d.h. ohne die Existenz einer Lösung bewiesen zu haben) für eine Lösung u von (0.2) eine Gleichung mit der linken Seite $-\nabla \cdot (A_0\nabla u)$ her.
(ii) Formulieren Sie nun eine Abbildung $S : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, sodass ein Fixpunkt von S bereits eine Lösung von (0.2) ist.
(iii) Zeigen Sie nun, dass für kleines $\varepsilon > 0$ die Abbildung S einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 4 (30 Punkte): (*Transformation zum flachen Rand*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^2-Rand. Weiter sei $A \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ auf Ω gleichmäßig elliptisch. Betrachte einen Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ und einen C^2-Diffeomorphismus $\psi : V \cap \Omega \to B_2(0)_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2, x_n > 0\}$, wobei V eine offene Umgebung von x_0 ist und $\psi(x_0) = 0$. Für $u \in H^1(\Omega)$ sei

$$\tilde{u} := u \circ \psi^{-1}.$$

(a) Leiten Sie die Matrix $\tilde{A}$ her, für die

$$\int_{\Omega\cap V} (\nabla v)^T (A\nabla u) = \int_{B_2(0)_+} (\nabla\tilde{v})^T (\tilde{A}\nabla\tilde{u})$$

für alle $\tilde{v} \in H_0^1(B_2(0)_+)$ gilt, wobei $v := \tilde{v} \circ \psi$.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{A} \in W^{1,\infty}(B_2(0)_+)$ und dass $\tilde{A}$ auf $B_2(0)_+$ gleichmäßig elliptisch ist.

Frohe Weihnachten !!!